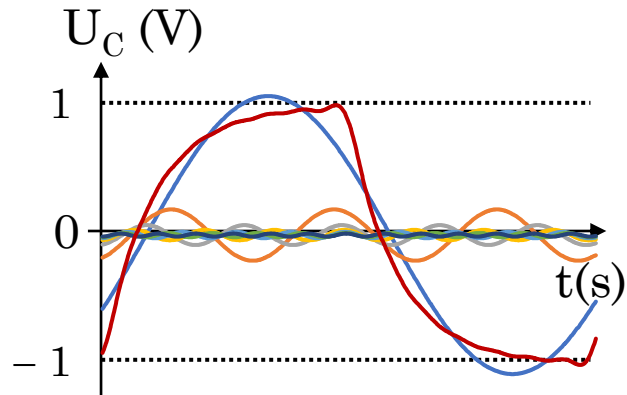


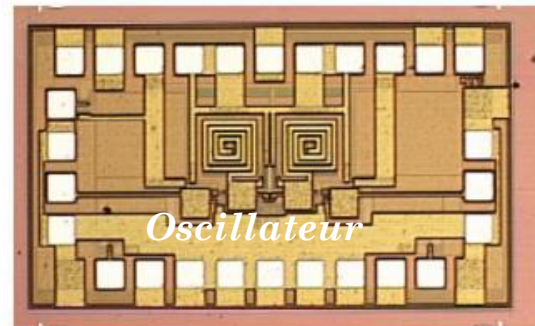
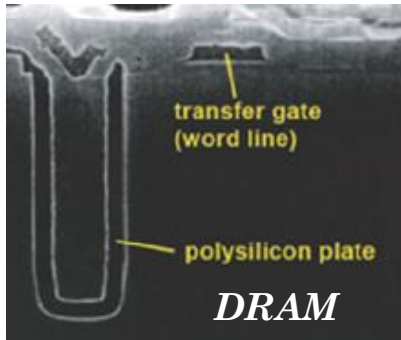
Les circuits



Pascal MASSON

(pascal.masson@univ-cotedazur.fr)

Edition 2020-2021



$$A_{\text{VC_db}}(F) = 20 \cdot \log \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi F \cdot RC)^2}} \right)$$
$$= -10 \cdot \log \left(1 + (2\pi F \cdot RC)^2 \right)$$

- I. Les lois fondamentales**
- II. Circuit RC**
- III. Circuit RLC**

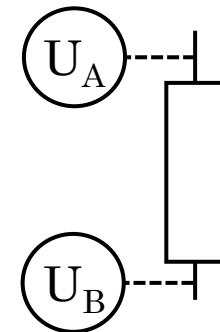
I.1. Potentiel et différence de potentiel

□ Définition du potentiel

- Le potentiel électrique (en Volt, V), est une grandeur qui définit l'état électrique d'un point de l'espace

□ Définition de la différence de potentiel

- La différence de potentiel électrique entre deux points d'un circuit permet de calculer la variation d'énergie potentielle d'une charge électrique



I.1. Potentiel et différence de potentiel

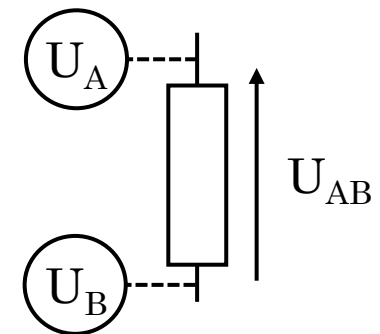
□ Définition du potentiel

- Le potentiel électrique (en Volt, V), est une grandeur qui définit l'état électrique d'un point de l'espace

□ Définition de la différence de potentiel

- La différence de potentiel électrique entre deux points d'un circuit permet de calculer la variation d'énergie potentielle d'une charge électrique
- Ainsi, la tension entre les points A et B est donnée par :

$$U_{AB} = U_A - U_B$$



I.1. Potentiel et différence de potentiel

□ Définition du potentiel

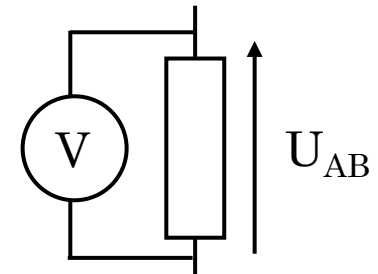
- Le potentiel électrique (en Volt, V), est une grandeur qui définit l'état électrique d'un point de l'espace

□ Définition de la différence de potentiel

- La différence de potentiel électrique entre deux points d'un circuit permet de calculer la variation d'énergie potentielle d'une charge électrique
- Ainsi, la tension entre les points A et B est donnée par :

$$U_{AB} = U_A - U_B$$

- La différence de potentiel se mesure avec un Voltmètre



I.2. La loi d'ohm

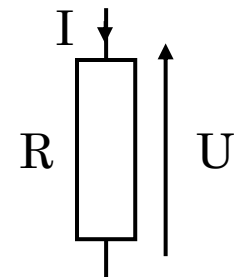
□ Définition

- Cette loi a été trouvée par Georg Simon OHM (1789-1854)



- La loi d'ohm permet de relier les valeurs du courant I (en Ampère, A), de la tension U (en Volt, V) et de la résistance R (en ohm, Ω).

$$U = R.I$$

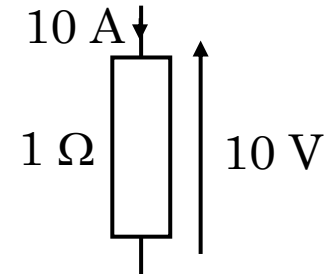


- On remarquera que par convention, le courant est fléché dans le sens opposé à la tension.

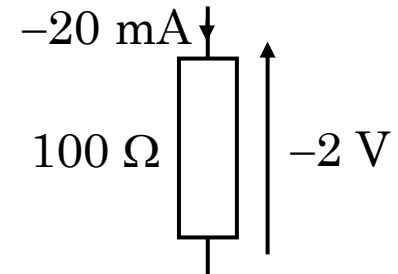
I.2. La loi d'ohm

▣ Exemples

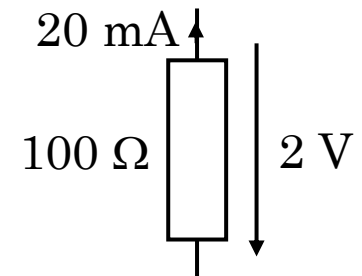
- 1) Si $U = 10 \text{ V}$ et $R = 1 \Omega$ alors $I = 10 \text{ A}$



- 2) Si $I = -20 \text{ mA}$ et $R = 100 \Omega$ alors $U = -2 \text{ V}$



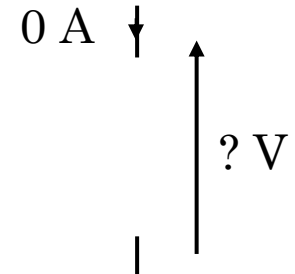
- Qui est identique à :



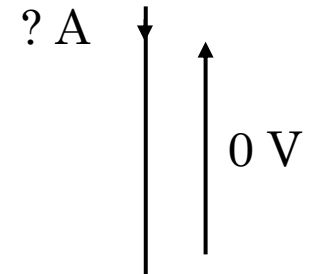
I.2. La loi d'ohm

□ Exemples

- 3) Si $R \rightarrow \infty$ alors $I \rightarrow 0$ (même $= 0$) quelque soit la valeur de U . C'est ce que l'on appelle un « circuit ouvert »



- 4) Si $R = 0$ alors $U = 0$ quelque soit la valeur de I . C'est ce que l'on appelle un « court-circuit »

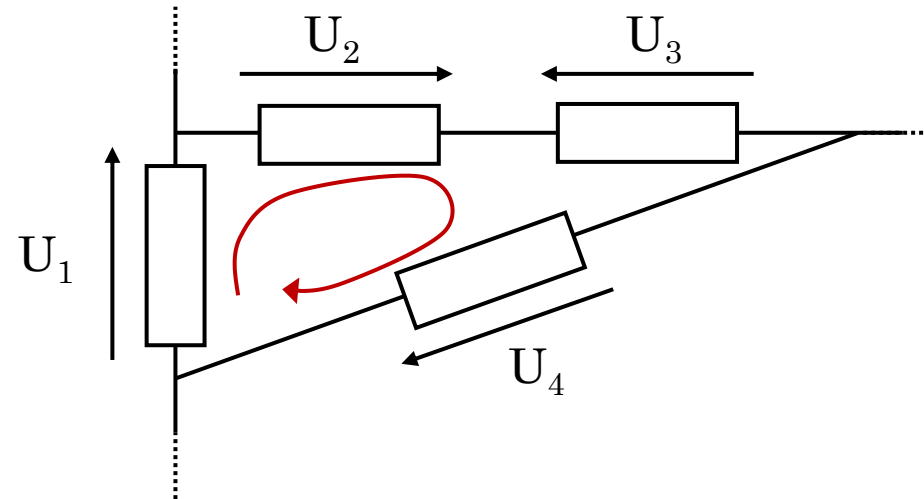


I.3. Les lois des mailles et des nœuds

□ Définition de la loi des mailles

- Une maille est un ensemble de branches qui forment une boucle
- La somme des tensions de cette boucle est égale à 0

□ Exemple de maille



I.3. Les lois des mailles et des nœuds

□ Définition de la loi des mailles

- Une maille est un ensemble de branches qui forment une boucle
- La somme des tensions de cette boucle est égale à 0

□ Exemple de maille

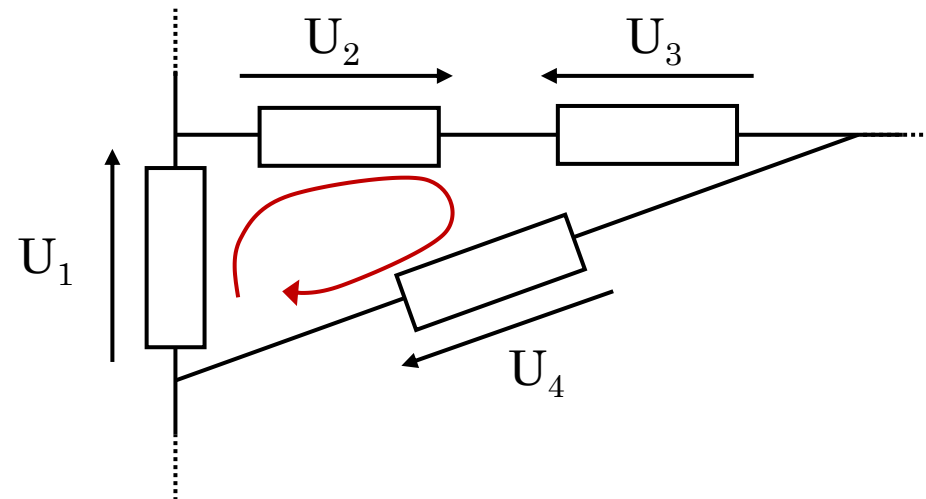
- La loi des mailles s'écrit :

$$U_1 + U_2 - U_3 + U_4 = 0$$

- La connaissance de 3 tensions permet de trouver la valeur de la 4^{ième}. Par exemple :

$$U_4 = -U_1 - U_2 + U_3$$

- Ici, nous choisissons d'appliquer un signe + à la tension lorsque l'on rentre par le bas de la flèche. On obtient le même résultat en changeant la convention (signe + lorsque l'on rentre par le haut de la flèche).



I.3. Les lois des mailles et des nœuds

□ Définition de la loi des nœuds

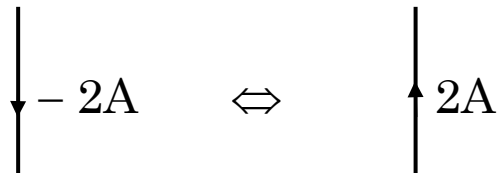
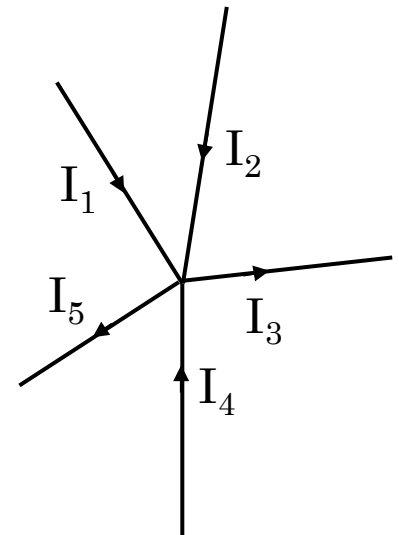
- Un nœud est le point d'arrivée de plusieurs branches
- La somme des courants qui arrivent/repartent d'un nœud est nulle

□ Exemple de nœud

- La loi des nœuds s'écrit :

$$I_1 + I_2 + I_4 = I_3 + I_5$$

- En application numérique, les courants peuvent être positifs ou négatifs. Si un courant est négatif, c'est qu'il va réellement dans le sens opposé à la flèche.

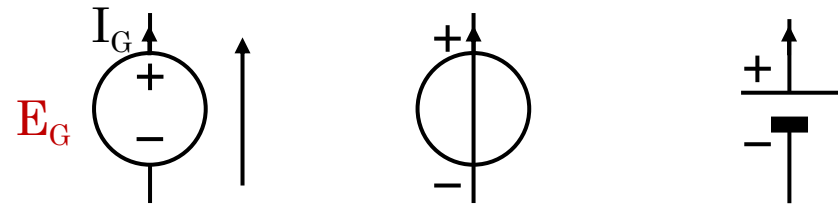


I.4. Les générateurs de tension et de courant

□ Générateur de tension idéal

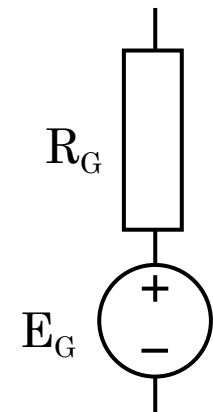
- Le générateur idéal de tension est un dipôle capable d'imposer une tension constante quelle que soit la charge reliée à ses bornes donc quelque soit la valeur du courant délivré ou reçu.

- Il est représenté par plusieurs symboles :



□ Générateur de tension réel

- En plus d'une source de tension idéale, un générateur de tension présente une résistance série qui peut être considérée comme un élément parasite puisque cette résistance prend une partie de la tension.
- Cette résistance doit donc être la plus faible possible.

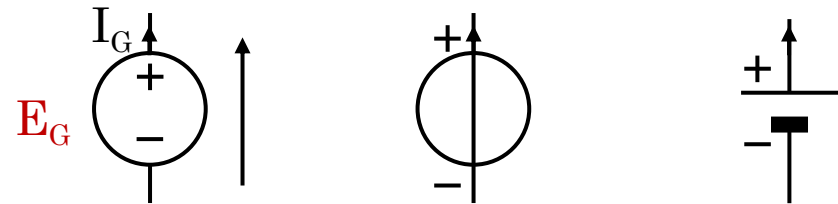


I.4. Les générateurs de tension et de courant

□ Générateur de tension idéal

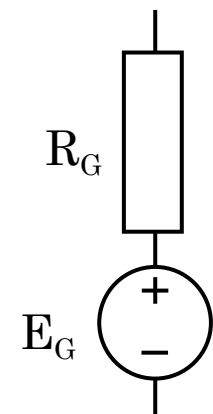
- Le générateur idéal de tension est un dipôle capable d'imposer une tension constante quelle que soit la charge reliée à ses bornes donc quelque soit la valeur du courant délivré ou reçu.

- Il est représenté par plusieurs symboles :



□ Générateur de tension réel

- En plus d'une source de tension idéale, un générateur de tension présente une résistance série qui peut être considérée comme un élément parasite puisque cette résistance prend une partie de la tension.
- Cette résistance doit donc être la plus faible possible.

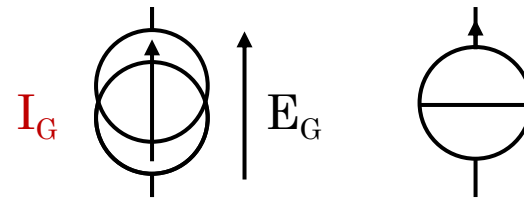


I.4. Les générateurs de tension et de courant

□ Générateur de courant idéal

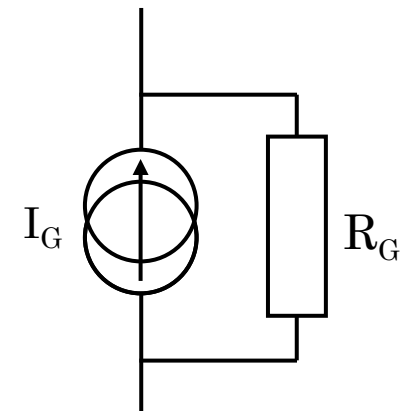
- Le générateur idéal de courant est un dipôle capable d'imposer un courant constant quelle que soit la charge reliée à ses bornes. Autrement dit, le courant est fixe et la tension dépend de ce qui est branché.

- Il est représenté par plusieurs symboles :



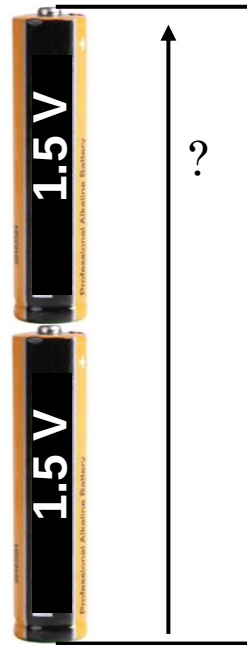
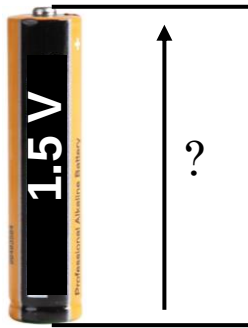
□ Générateur de courant réel

- En plus d'une source de courant idéale, un générateur de courant présente une résistance parallèle qui peut être considérée comme un élément parasite puisque cette résistance consomme une partie du courant délivré.
- Cette résistance doit donc être la plus forte possible.



I.5. Compléments

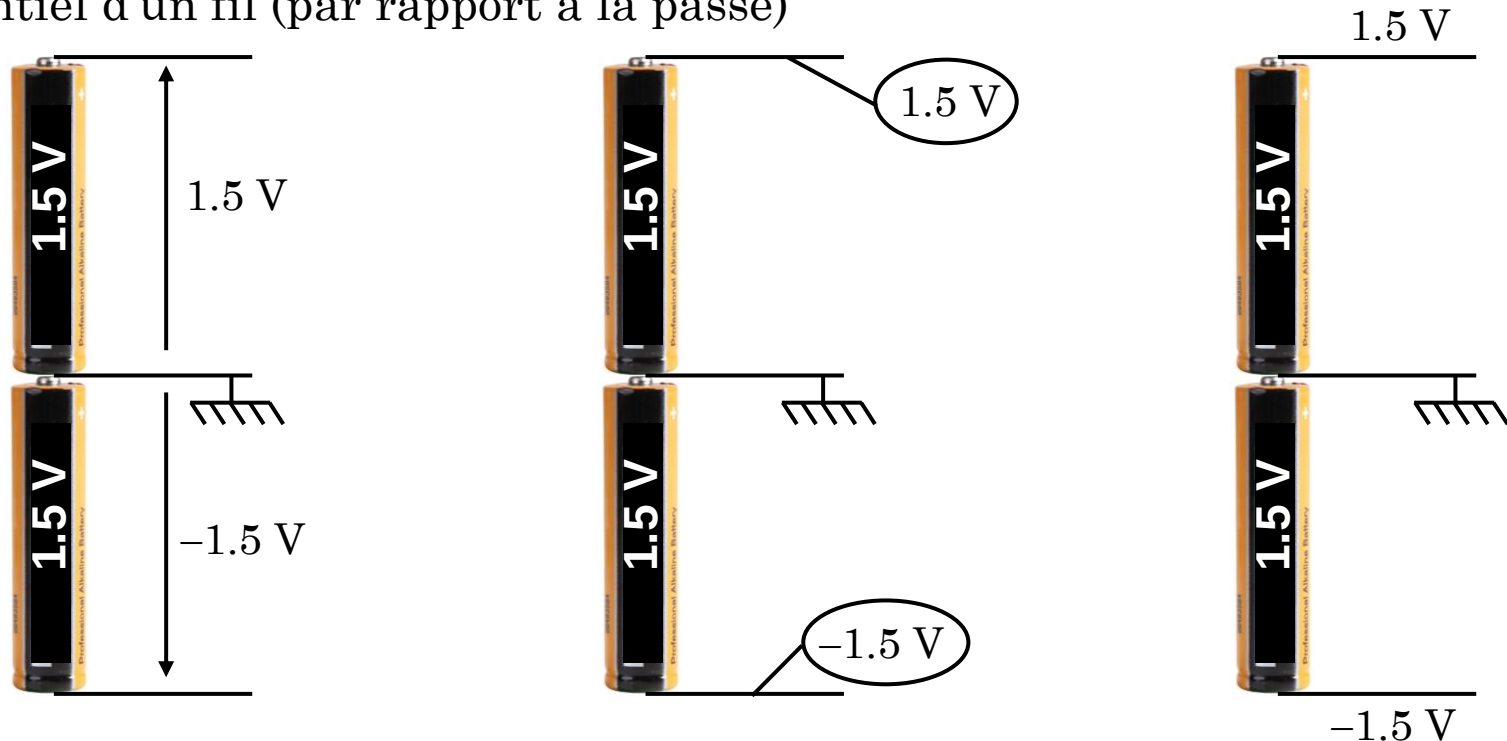
□ Association de générateurs



I.5. Compléments

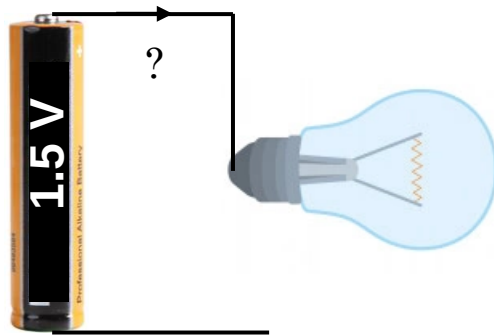
□ Potentiel de référence

- On positionne la masse sur un des fils du circuit. Cela signifie que le potentiel de ce fil est égal à 0 V
- On peut alors faire disparaître certaines des flèches en indiquant le potentiel d'un fil (par rapport à la masse)



I.5. Compléments

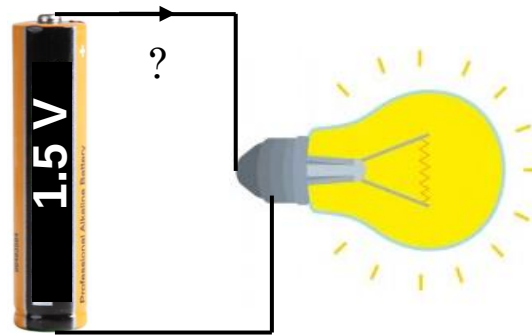
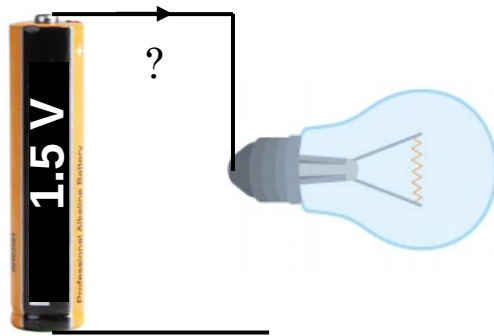
- ❑ **Présence ou non d'un courant ?**
 - Est-ce que dans ce cas, la pile délivre du courant ?



I.5. Compléments

□ Présence ou non d'un courant ?

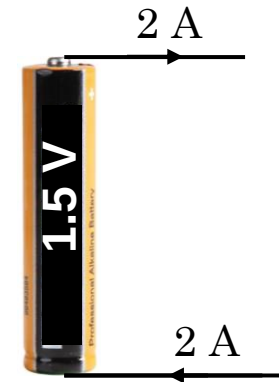
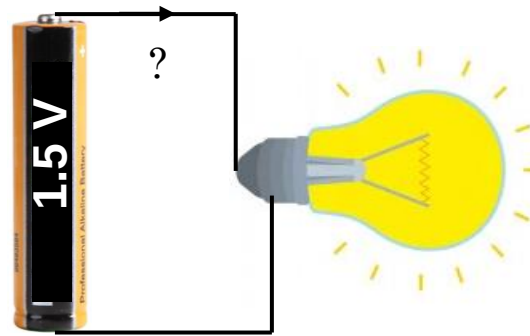
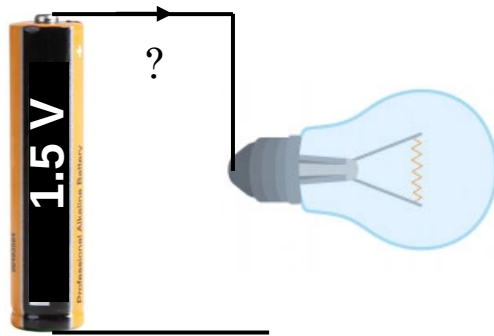
- Est-ce que dans ce cas, la pile délivre du courant ?



I.5. Compléments

□ Présence ou non d'un courant ?

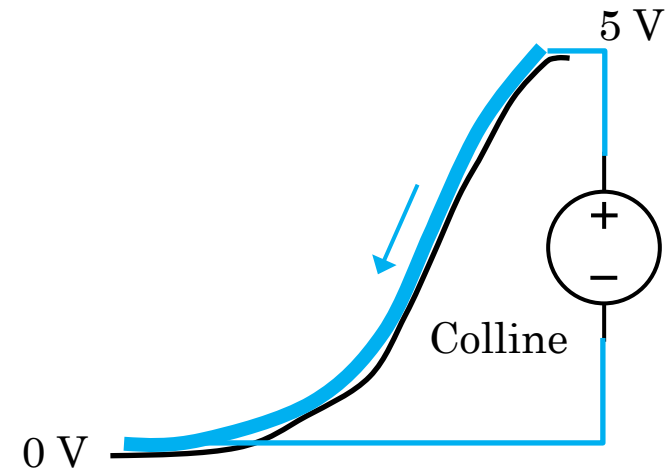
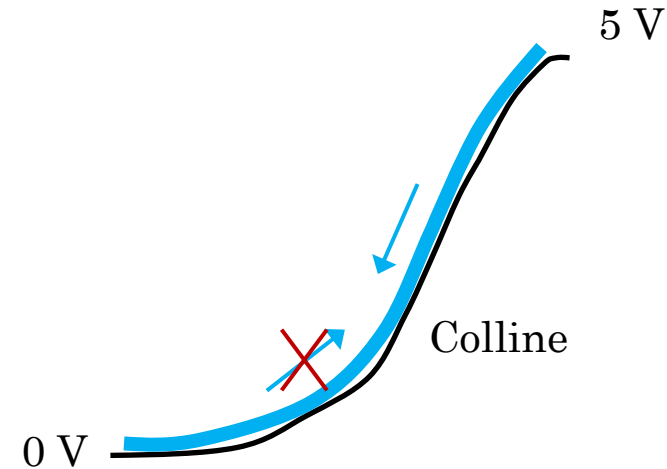
- Est-ce que dans ce cas, la pile délivre du courant ?
- Donc si un générateur délivre 2 A par la borne « + », il récupère 2 A par la borne « - »



I.5. Compléments

□ Analogie avec l'eau

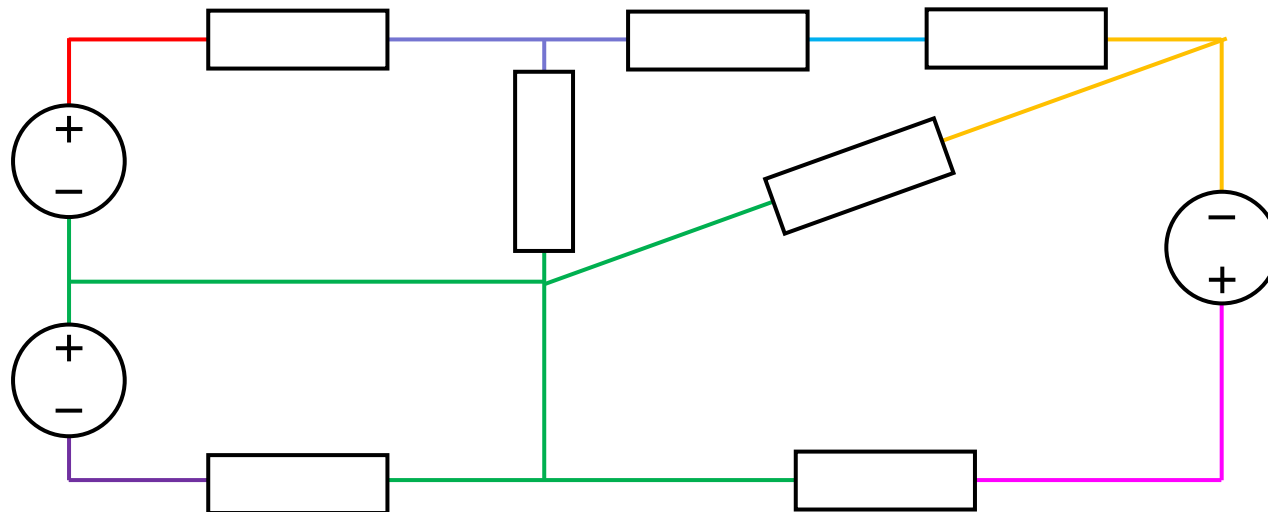
- L'eau s'écoule du point le plus haut vers le point le plus bas. Le courant s'écoule du potentiel le plus fort au potentiel le plus bas.
- L'eau ne remonte pas la rivière ! Le courant ne remonte pas le potentiel !
- Une pompe (générateur en électricité) prend l'eau en bas de la colline pour la remonter en haut.



I.5. Compléments

□ Tension sur un fil

- Les fils connectés à un nœud sont tous au même potentiel
- Pour faciliter l'étude des circuits, on peut dans un premier temps surligner avec une même couleur tous les fils au même potentiel

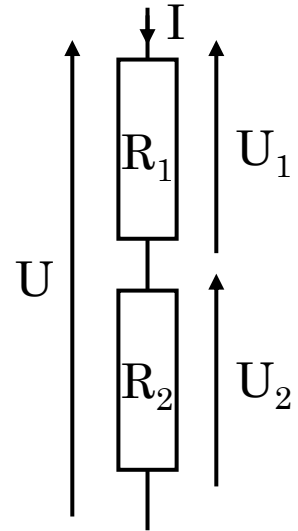


I.6. Résistance équivalente

□ Résistances en série

- On considère 2 résistances sur une même branche
- Le courant I traverse ces 2 résistances
- La loi des mailles s'écrit :

$$U = U_1 + U_2 = R_1.I + R_2.I = (R_1 + R_2).I = R_{eq}.I$$



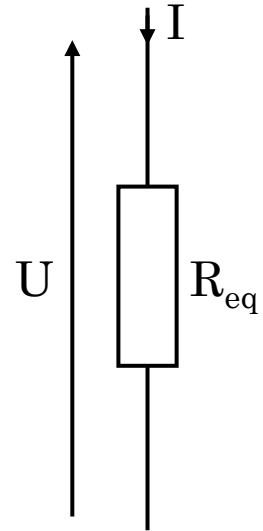
I.6. Résistance équivalente

□ Résistances en série

- On considère 2 résistances sur une même branche
- Le courant I traverse ces 2 résistances
- La loi des mailles s'écrit :

$$U = U_1 + U_2 = R_1.I + R_2.I = (R_1 + R_2).I = R_{eq}.I$$

- On remarque que d'un point de vu mathématique, les 2 résistances peuvent être remplacées par une seule résistance, R_{eq} .



I.6. Résistance équivalente

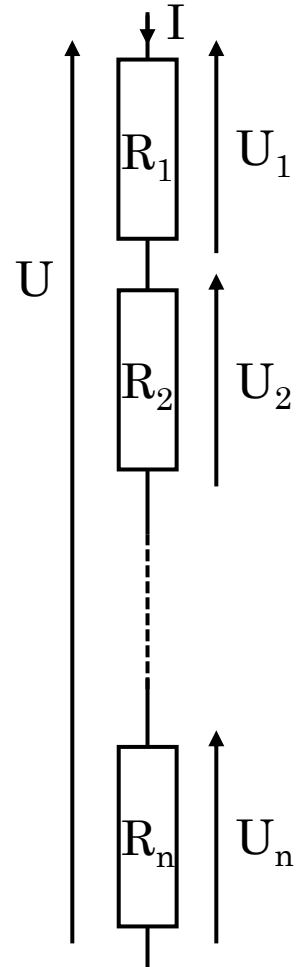
□ Résistances en série

- On considère 2 résistances sur une même branche
- Le courant I traverse ces 2 résistances
- La loi des mailles s'écrit :

$$U = U_1 + U_2 = R_1.I + R_2.I = (R_1 + R_2).I = R_{eq}.I$$

- On remarque que d'un point de vu mathématique, les 2 résistances peuvent être remplacées par une seule résistance, R_{eq} .

- On peut généraliser cela à n résistances : $R_{eq} = \sum_{i=1}^n R_i$

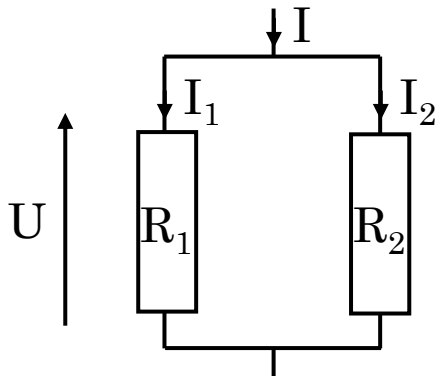


I.6. Résistance équivalente

□ Résistances en parallèle

- On considère 2 résistances sur 2 branches en parallèles
- La tension est la même aux bornes des 2 résistances.
- Le courant total I a pour expression :

$$I = I_1 + I_2 = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} = \frac{1}{R_{eq}} \cdot U \quad \text{avec} \quad R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = R_1 \parallel R_2$$



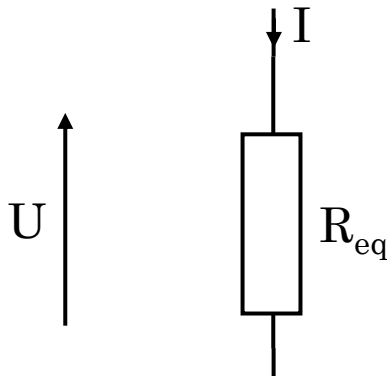
I.6. Résistance équivalente

□ Résistances en parallèle

- On considère 2 résistances sur 2 branches en parallèles
- La tension est la même aux bornes des 2 résistances.
- Le courant total I a pour expression :

$$I = I_1 + I_2 = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} = \frac{1}{R_{eq}} \cdot U \quad \text{avec} \quad R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = R_1 \parallel R_2$$

- On remarque que d'un point de vu mathématique, les 2 résistances peuvent être remplacées par une seule résistance, R_{eq} .



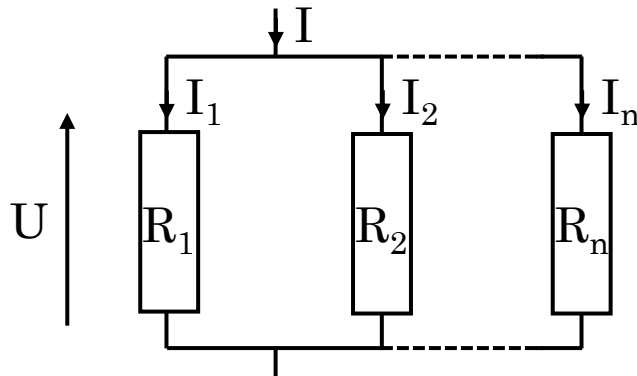
I.6. Résistance équivalente

▣ Résistances en parallèle

- On considère 2 résistances sur 2 branches en parallèles
- La tension est la même aux bornes des 2 résistances.
- Le courant total I a pour expression :

$$I = I_1 + I_2 = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} = \frac{1}{R_{eq}} \cdot U \quad \text{avec} \quad R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = R_1 \parallel R_2$$

- On remarque que d'un point de vu mathématique, les 2 résistances peuvent être remplacées par une seule résistance, R_{eq} .



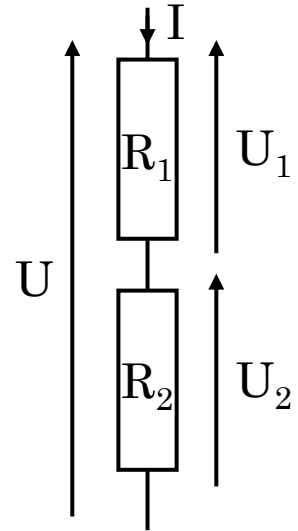
- On peut généraliser cela à n résistances :

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$$

I.7. Diviseurs de tension et de courant

□ Diviseur de tension

- On considère 2 résistances sur une même branche
- Le courant I a pour expression :
$$I = \frac{U}{R_1 + R_2}$$
- La tension U_2 a pour expression :
$$U_2 = R_2 \cdot I = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U$$
- On constate que la tension U_2 peut être obtenue à partir des valeurs des résistances et de la tension totale sur la branche. C'est ce que l'on appelle le diviseur de tension.

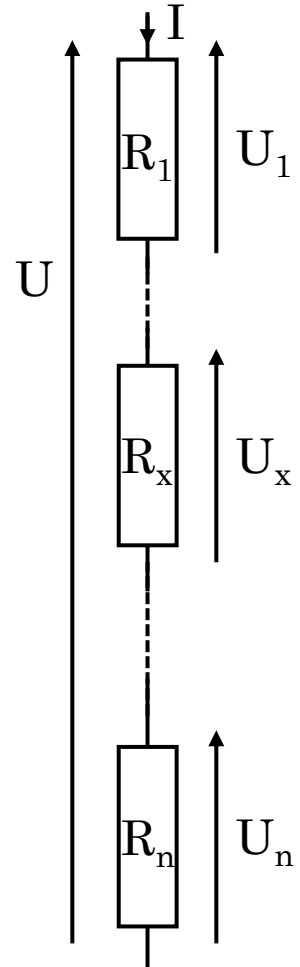


I.7. Diviseurs de tension et de courant

□ Diviseur de tension

- On considère 2 résistances sur une même branche
- Le courant I a pour expression : $I = \frac{U}{R_1 + R_2}$
- La tension U_2 a pour expression : $U_2 = R_2 \cdot I = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U$
- On constate que la tension U_2 peut être obtenue à partir des valeurs des résistances et de la tension totale sur la branche. C'est ce que l'on appelle le diviseur de tension.
- On peut le généraliser à n résistances :

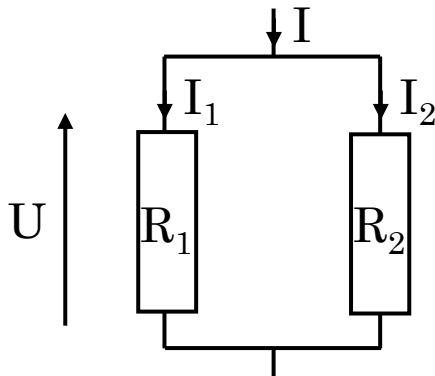
$$U_x = \frac{R_x}{\sum_{i=1}^n R_i} \cdot U$$



I.7. Diviseurs de tension et de courant

□ Diviseur de courant

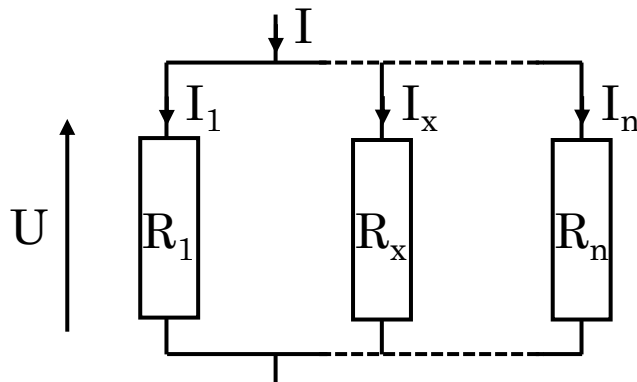
- On considère 2 résistances sur 2 branches en parallèles
- La tension U a pour expression : $U = R_{eq} \cdot I$
- Le courant I_2 a pour expression :
$$I_2 = \frac{U}{R_2} = \frac{R_{eq}}{R_2} \cdot I = \frac{R_2 \cdot R_1}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{R_2} \cdot I = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot I$$



I.7. Diviseurs de tension et de courant

▣ Diviseur de courant

- On considère 2 résistances sur 2 branches en parallèles
- La tension U a pour expression : $U = R_{eq} \cdot I$
- Le courant I_2 a pour expression :
$$I_2 = \frac{U}{R_2} = \frac{R_{eq}}{R_2} \cdot I = \frac{R_2 \cdot R_1}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{R_2} \cdot I = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot I$$
- On peut généraliser ce calcul à n branches en parallèle :
$$I_x = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{R_x}{R_i}} \cdot I$$



I.8. Théorème de superposition

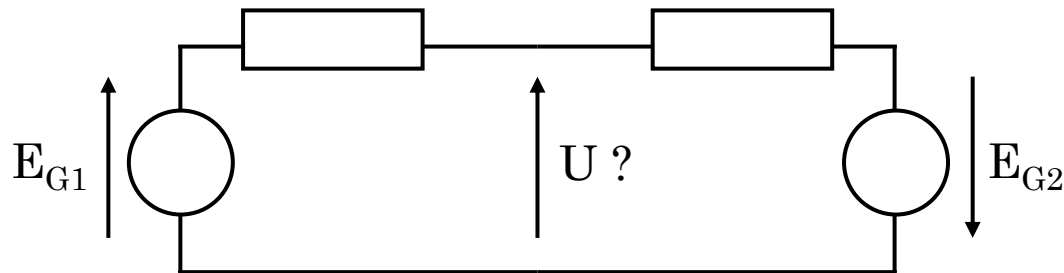
□ Définition

- Considérons un circuit composé d'éléments linéaires (résistances, condensateurs, générateurs indépendants ...).
- La réponse dans une branche est égale à la somme des réponses pour chaque générateur indépendant pris isolément donc en désactivant les autres générateurs.
- On désactive un générateur de tension en le remplaçant par un court-circuit et un générateur de courant en le remplaçant par un circuit ouvert

I.8. Théorème de superposition

□ Exemple

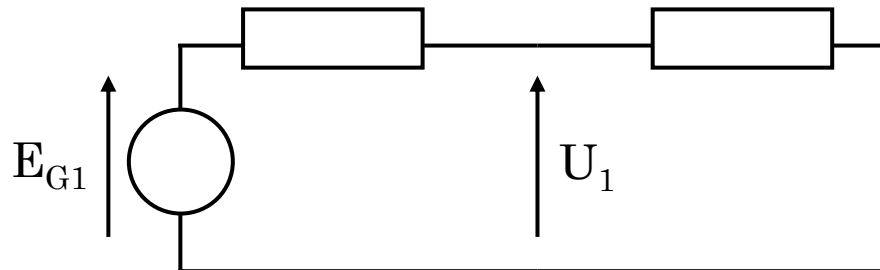
- Soit un montage avec 2 générateurs de tension et 2 résistances
- On souhaite connaître la tension U



I.8. Théorème de superposition

□ Exemple

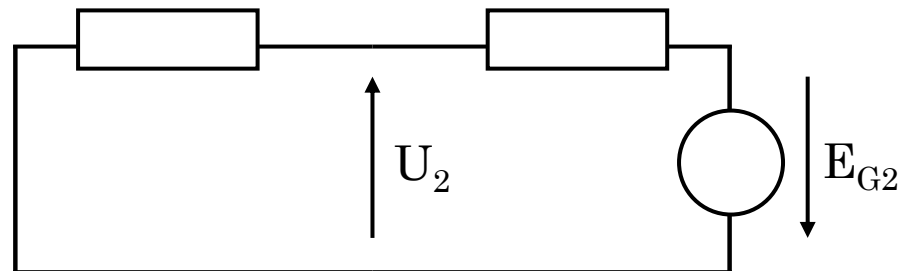
- Soit un montage avec 2 générateurs de tension et 2 résistances
- On souhaite connaître la tension U
- L'extinction de la tension E_{G2} donne U_1



I.8. Théorème de superposition

□ Exemple

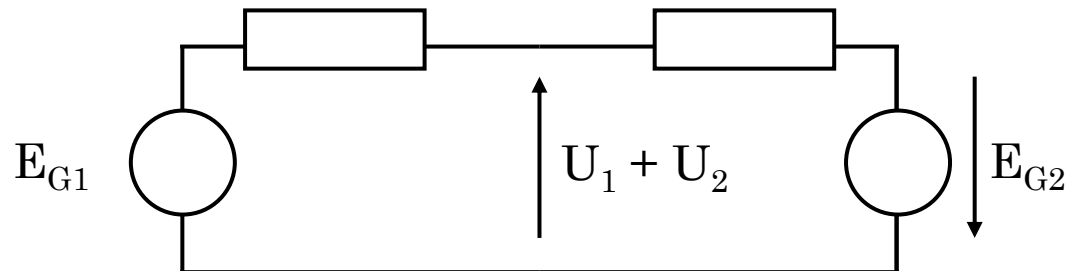
- Soit un montage avec 2 générateurs de tension et 2 résistances
- On souhaite connaître la tension U
- L'extinction de la tension E_{G2} donne U_1
- L'extinction de la tension E_{G1} donne U_2



I.8. Théorème de superposition

□ Exemple

- Soit un montage avec 2 générateurs de tension et 2 résistances
- On souhaite connaître la tension U
- L'extinction de la tension E_{G2} donne U_1
- L'extinction de la tension E_{G1} donne U_2
- On obtient finalement la tension $U = U_1 + U_2$



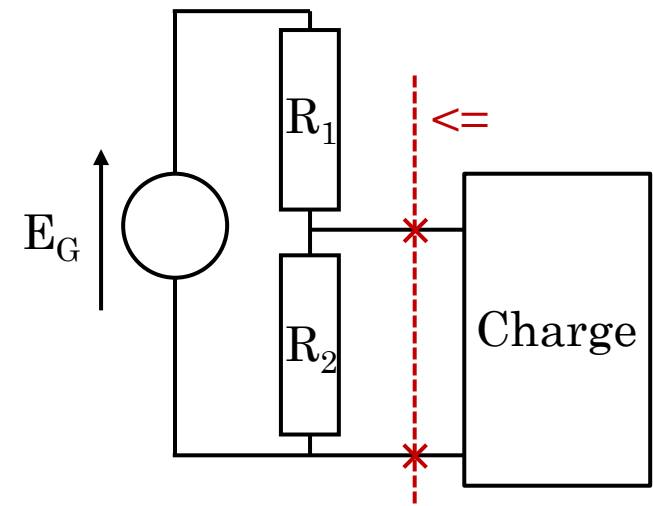
I.9. Générateur équivalent de Thévenin

□ Objectif

- L'objectif du générateur de Thévenin est de simplifier l'étude des circuits électrique en réduisant mathématiquement leurs tailles

□ Exemple

- On souhaite remplacer les éléments E_G , R_1 et R_2 par un générateur de tension E_{th} avec une résistance série R_{th} .



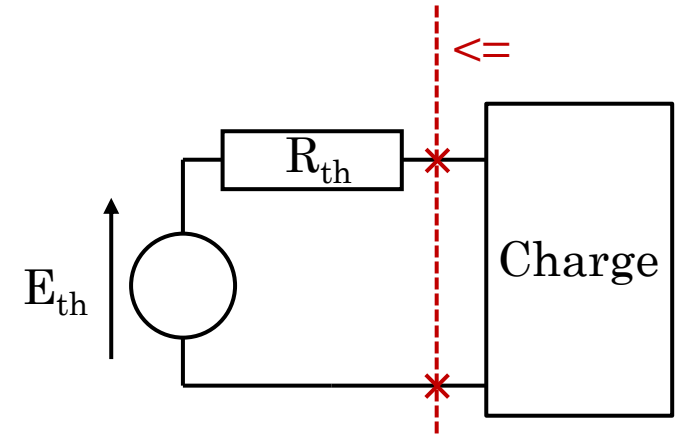
I.9. Générateur équivalent de Thévenin

□ Objectif

- L'objectif du générateur de Thévenin est de simplifier l'étude des circuits électrique en réduisant mathématiquement leurs tailles

□ Exemple

- On souhaite remplacer les éléments E_G , R_1 et R_2 par un générateur de tension E_{th} avec une résistance série R_{th} .



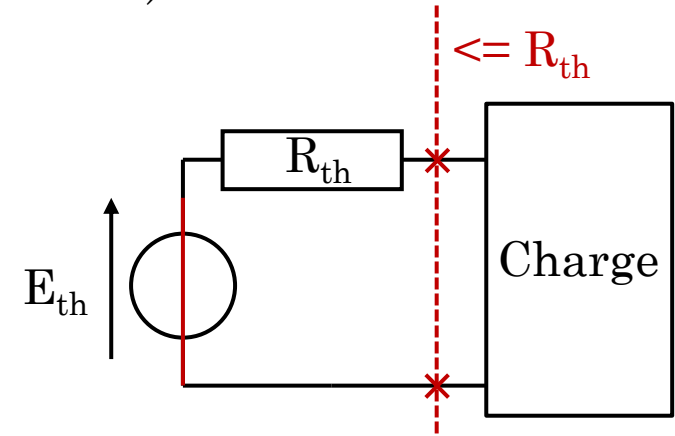
I.9. Générateur équivalent de Thévenin

□ Objectif

- L'objectif du générateur de Thévenin est de simplifier l'étude des circuits électrique en réduisant mathématiquement leurs tailles

□ Exemple

- On souhaite remplacer les éléments E_G , R_1 et R_2 par un générateur de tension E_{th} avec une résistance série R_{th} .
- Pour déterminer R_{th} , il faut remarquer que c'est la résistance « vue » en entrée si on éteint la source de tension E_{th} (court-circuit).



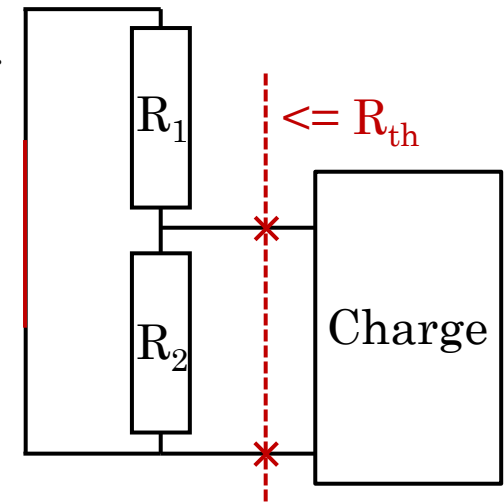
I.9. Générateur équivalent de Thévenin

□ Objectif

- L'objectif du générateur de Thévenin est de simplifier l'étude des circuits électrique en réduisant mathématiquement leurs tailles

□ Exemple

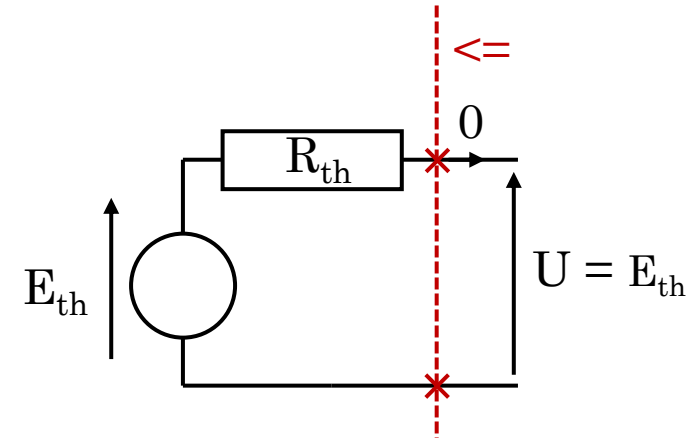
- On souhaite remplacer les éléments E_G , R_1 et R_2 par un générateur de tension E_{th} avec une résistance série R_{th} .
- Pour déterminer R_{th} , il faut remarquer que c'est la résistance « vue » en entrée si on éteint la source de tension E_{th} (court-circuit).
- On obtient : $R_{th} = R_1 // R_2$



I.9. Générateur équivalent de Thévenin

□ Exemple

- Pour E_{th} , il faut remarquer que $U = E_{th}$ si on enlève la charge. Dans ce cas, le courant de sortie est nul.

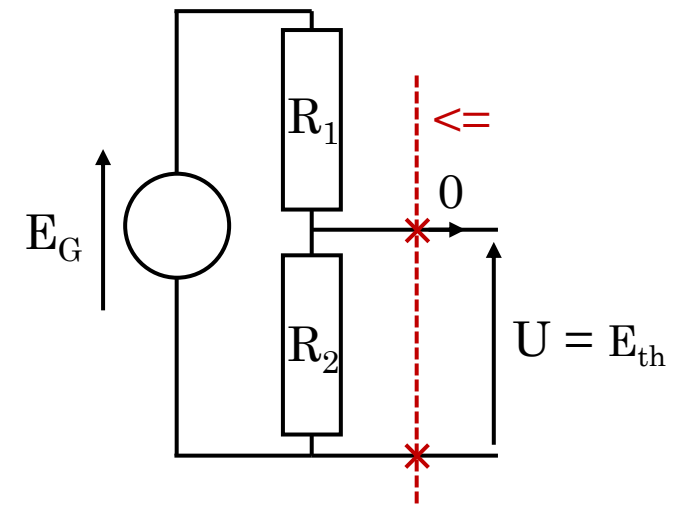


I.9. Générateur équivalent de Thévenin

□ Exemple

- Pour E_{th} , il faut remarquer que $U = E_{th}$ si on enlève la charge. Dans ce cas, le courant de sortie est nul.

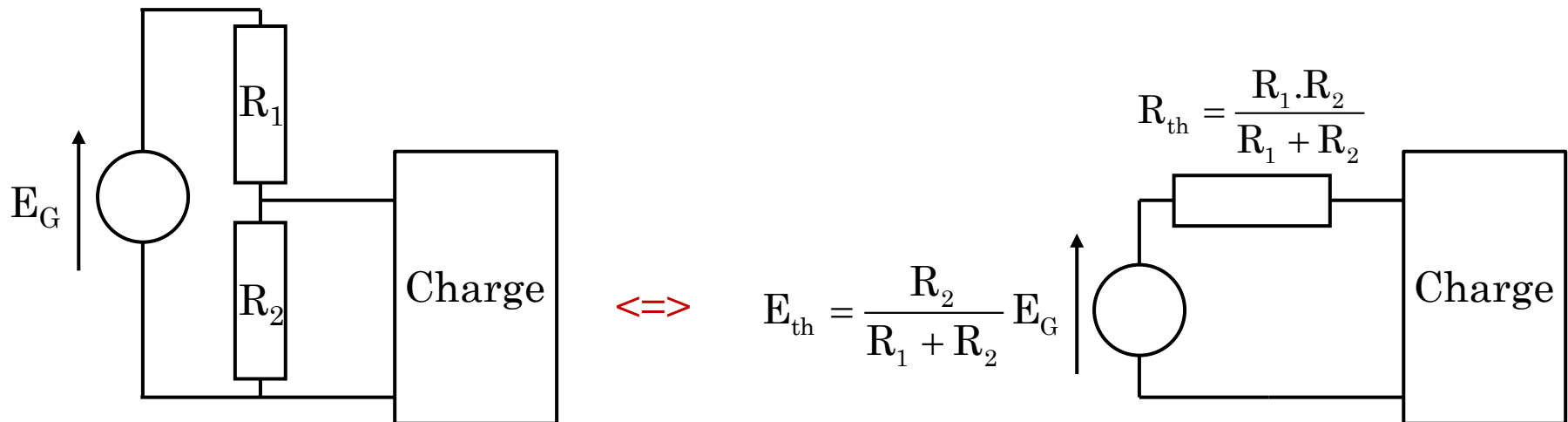
- On utilise le diviseur de tension :
$$E_{th} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E_G$$



I.9. Générateur équivalent de Thévenin

□ Exemple

- Pour E_{th} , il faut remarquer que $U = E_{th}$ si on enlève la charge. Dans ce cas, le courant de sortie est nul.
- On utilise le diviseur de tension :
$$E_{th} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E_G$$
- En résumé, ces 2 circuits sont équivalents :



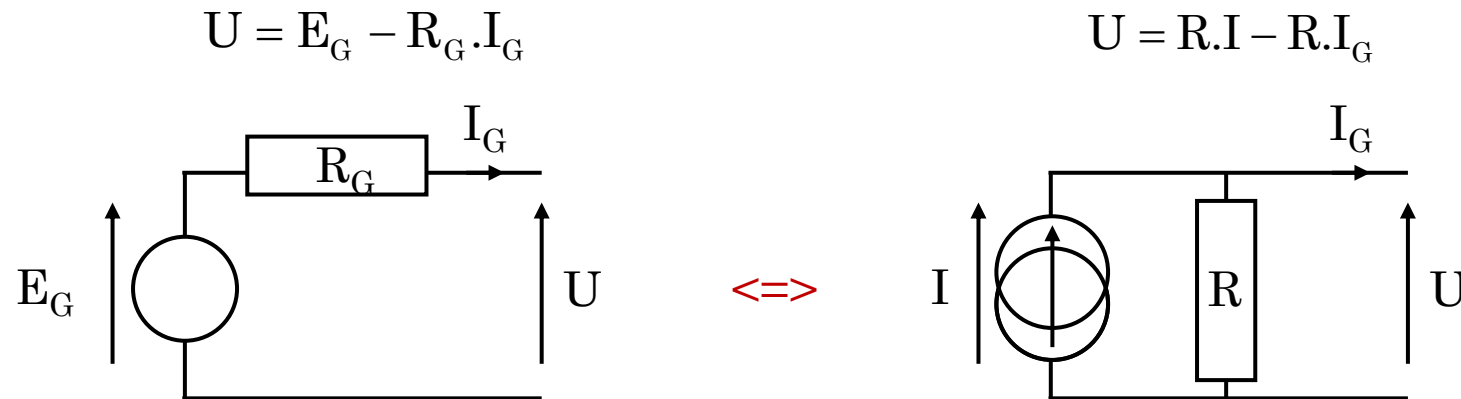
I.10. Transformation Thévenin-Norton

□ Objectif

- L'objectif est de transformer un générateur de tension (Thévenin) en un générateur de courant (Norton) et réciproquement pour simplifier l'étude des circuits.

□ Thévenin-Norton

- La tension de sortie U a pour expressions :



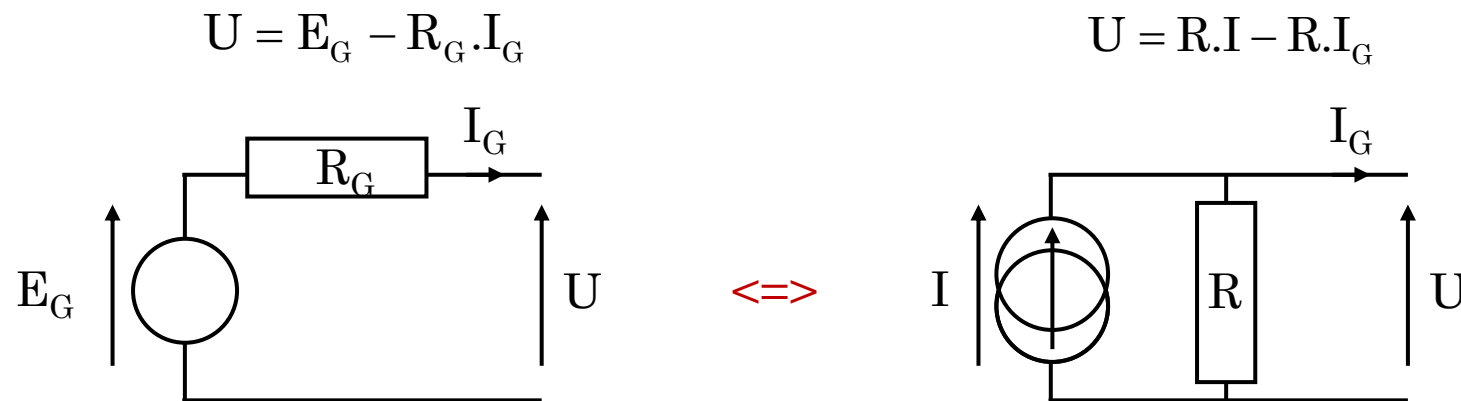
I.10. Transformation Thévenin-Norton

□ Objectif

- L'objectif est de transformer un générateur de tension (Thévenin) en un générateur de courant (Norton) et réciproquement pour simplifier l'étude des circuits.

□ Thévenin-Norton

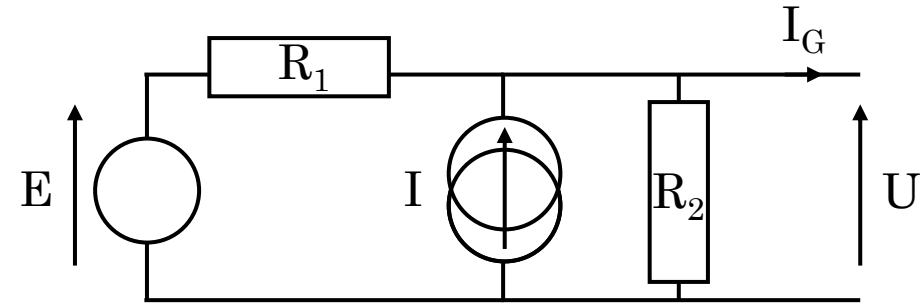
- La tension de sortie U a pour expressions :
- Après identification, on trouve : $R = R_G$ et $I = E_G / R_G$



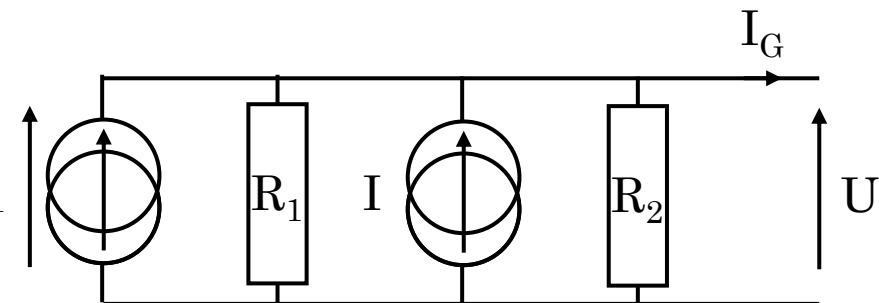
I.10. Transformation Thévenin-Norton

□ Exemple

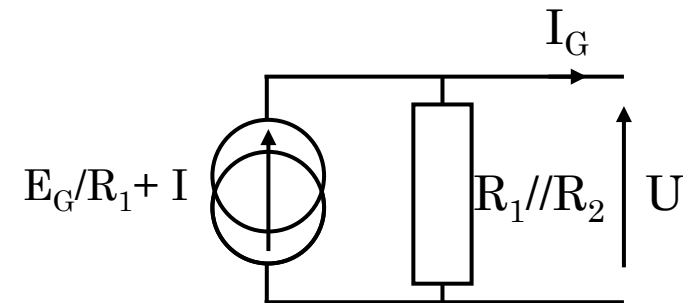
- On souhaite simplifier ce schéma pour aboutir à une seule source de tension et une résistance :



- On transforme la source de tension en source de courant :



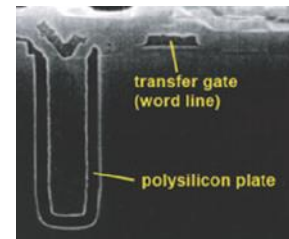
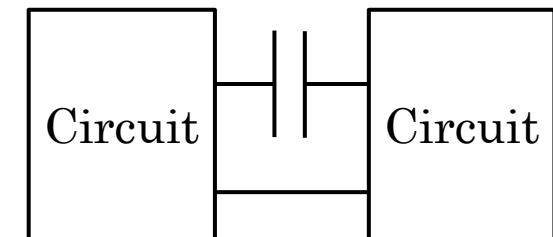
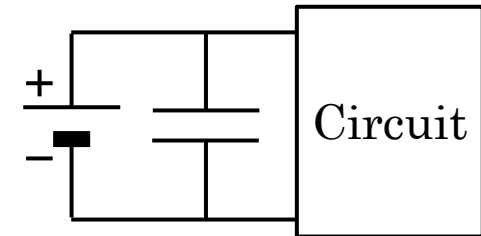
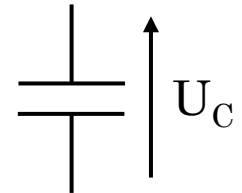
- Pour finir, on regroupe les résistances et les courants :



II.1. Le condensateur

□ Définition

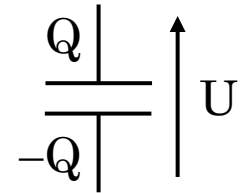
- Un condensateur (ou capacité) est constitué de deux armatures conductrices séparées par un isolant appelé diélectrique.
- Ils ont plusieurs utilités comme par exemples :
 - ✓ Découplage : le condensateur sert de réservoir de charges en cas de trop fort appel de courant sur l'alimentation
 - ✓ Liaison : il ne laisse passer que l'alternatif entre 2 circuits (amplificateurs par exemple)
 - ✓ Filtrage : il est utilisé pour modifier les signaux analogiques
 - ✓ Mémoire : stocker l'information 1 ou 0 des mémoires DRAM



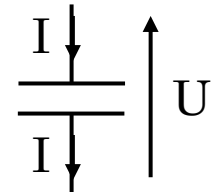
II.1. Le condensateur

□ Modélisation

▪ Lorsqu'on place un électron sur une des armatures, un électron part de l'autre armature (il reste un trou). La première armature est donc chargée négativement et l'autre positivement. On notera cette charge Q (en Coulomb, C)



▪ Ce mouvement de charge implique que le courant qui arrive sur une armature est égale à celui qui part de l'autre. Evidement, ce courant ne traverse pas le diélectrique !



▪ La charge stockée dépendant de la capacité, C (en Farad, F), à stocker les charges et de la tension aux bornes de l'isolant :

$$Q = C.U$$

▪ La tension aux bornes du condensateur ne peut pas changer instantanément, elle est continue

II.1. Le condensateur

□ Modélisation

- C'est le contraire pour le courant qui dépend de la variation de charge sur les armatures en fonction du temps :

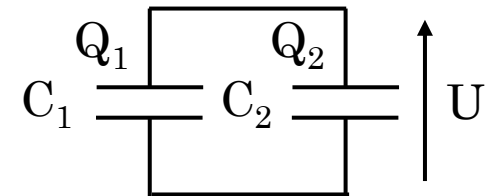
$$I = \frac{dQ}{dt}$$

- L'énergie (en joule, J) emmagasinée par un condensateur est :

$$E = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2$$

□ Association en parallèle

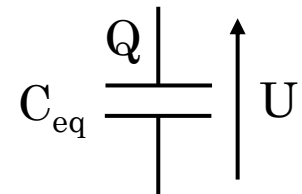
- Soit 2 condensateurs en parallèle donc soumis à la même tension U.



- La somme des charges s'écrit :

$$Q_1 + Q_2 = C_1 \cdot U + C_2 \cdot U = (C_1 + C_2) \cdot U = C_{eq} \cdot U$$

- La capacité équivalente est égale à la somme des 2 capacités.

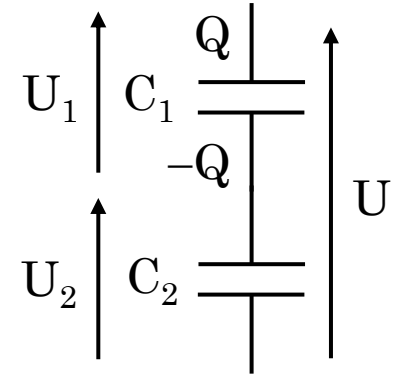


- Ce raisonnement peut être étendu à n condensateurs en parallèle

II.1. Le condensateur

□ Association série

- Les condensateurs sont initialement déchargés et on applique une tension U .
- Une charge Q apparait sur l'armature supérieure de C_1 et donc forcément une charge $-Q$ de l'autre côté.



II.1. Le condensateur

□ Association série

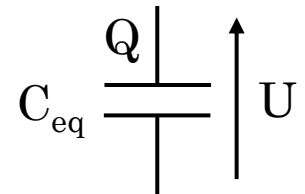
▪ Les condensateurs sont initialement déchargés et on applique une tension U .

▪ Une charge Q apparait sur l'armature supérieure de C_1 et donc forcément une charge $-Q$ de l'autre côté.

▪ Il en résulte l'apparition d'une charge Q sur l'armature supérieure du condensateur C_2 .

▪ A présent, on peut écrire l'expression de la tension U :

$$U = U_1 + U_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \cdot Q = \frac{1}{C_{eq}} \cdot Q$$



▪ Donc en série, les condensateurs se somment par leur inverse

▪ Le stockage de l'information 1 ou 0 des mémoires Flashs se fait en ajoutant ou en enlevant des charges entre les 2 condensateurs.

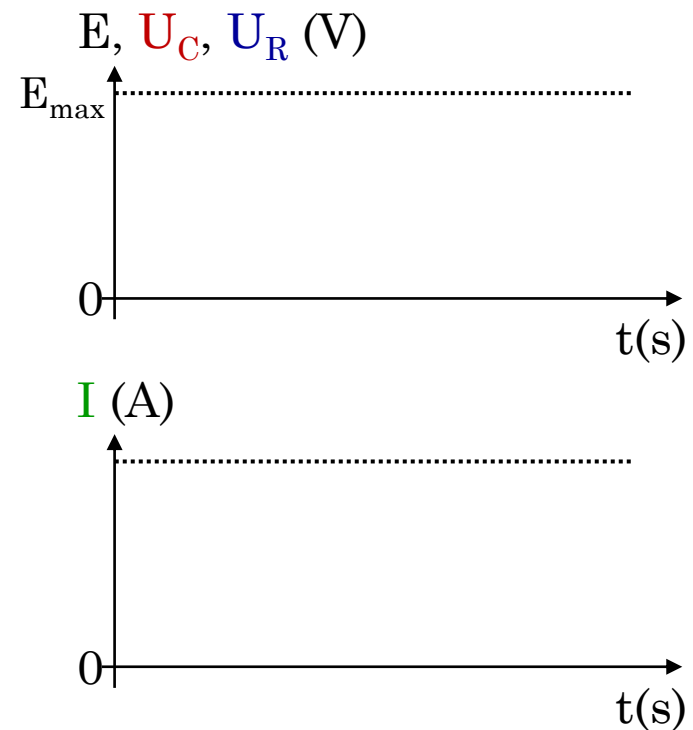
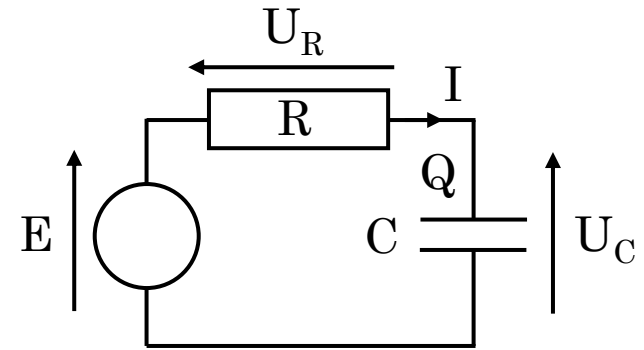
II.2. Réponse à un échelon de tension

□ Mise en équation

- Le circuit est composé de 3 éléments dont le condensateur qui est déchargé à l'état initial.
- La loi des mailles s'écrit :

$$E = R.I(t) + U_C(t) = R.C. \frac{dU_C}{dt} + U_C(t)$$

- Soit : $\frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{R.C} U_C - \frac{1}{R.C} E = 0$
- Cette équation différentielle du 1^{er} ordre a pour solution : $U_C(t) = A.e^{-\frac{t}{R.C}} + B$
- A et B sont des constantes qui dépendent des conditions initiale et finale
- $R.C = \tau$ (en s) est la constante de temps du circuit



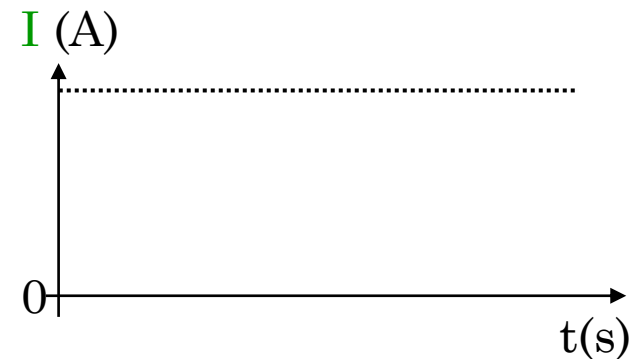
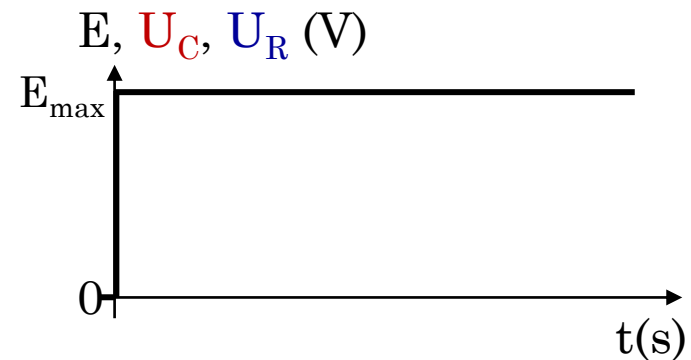
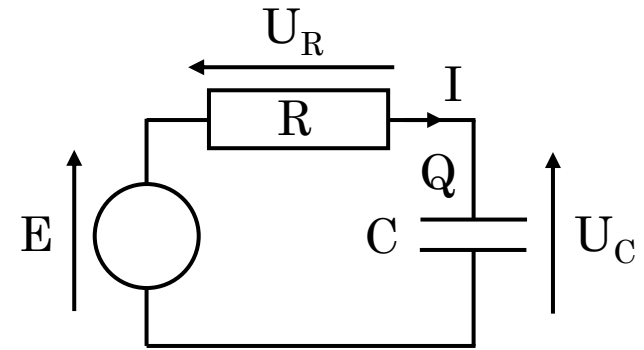
II.2. Réponse à un échelon de tension

□ Charge du condensateur

- A $t = 0$, la tension E passe de 0 à $E_{\max}$
- La condition initiale est $U_C(t = 0) = 0$
- La condition finale est $U_C(t \rightarrow \infty) = E_{\max}$.
 En effet, dans ce cas U_R devient nulle et il n'y a plus de courant dans le circuit : le condensateur cesse de se charger

- On peut écrire :
$$\begin{cases} U_C(0) = A + B = 0 \\ U_C(\infty) = B = E_{\max} \end{cases}$$

- Et finalement :
$$U_C(t) = E_{\max} \left(1 - e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \right)$$



II.2. Réponse à un échelon de tension

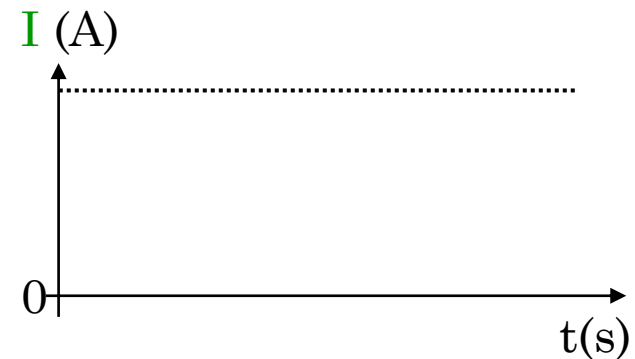
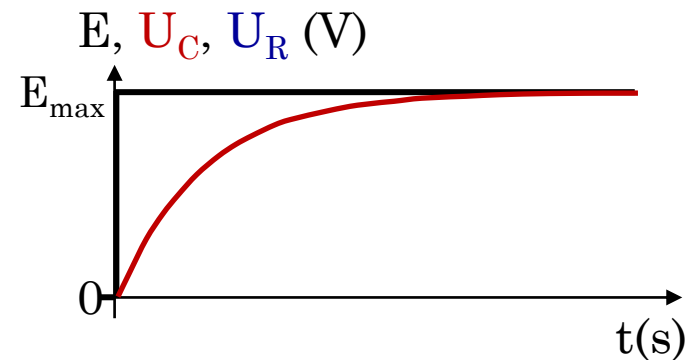
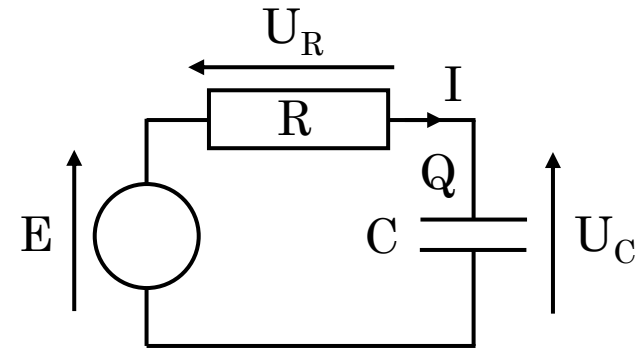
□ Charge du condensateur

- A $t = 0$, la tension E passe de 0 à $E_{\max}$
- La condition initiale est $U_C(t = 0) = 0$
- La condition finale est $U_C(t \rightarrow \infty) = E_{\max}$.
 En effet, dans ce cas U_R devient nulle et il n'y a plus de courant dans le circuit : le condensateur cesse de se charger

- On peut écrire :
$$\begin{cases} U_C(0) = A + B = 0 \\ U_C(\infty) = B = E_{\max} \end{cases}$$

- Et finalement :
$$U_C(t) = E_{\max} \left(1 - e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \right)$$

qui est une exponentielle croissante



II.2. Réponse à un échelon de tension

□ Charge du condensateur

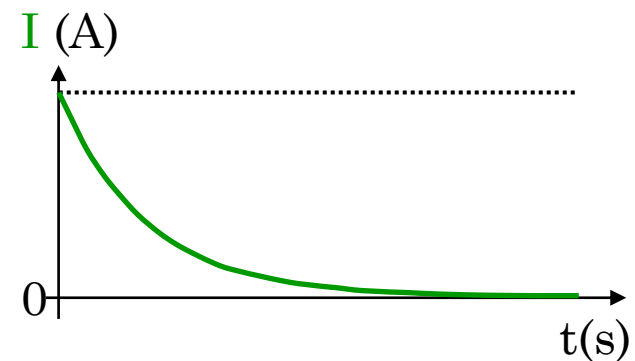
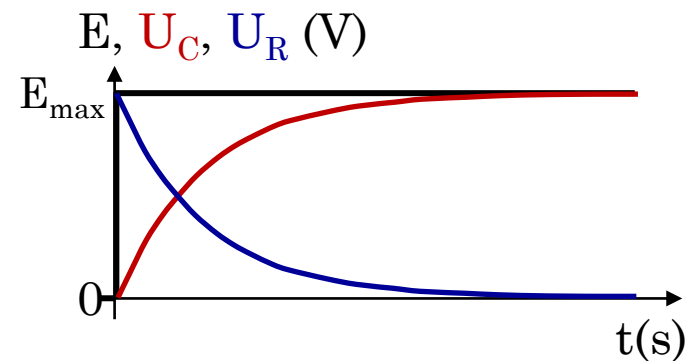
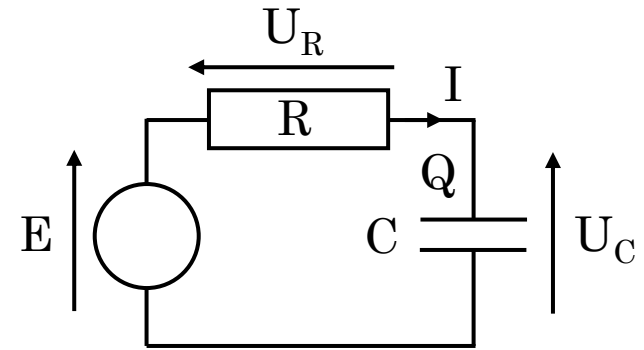
- La tension aux bornes de la résistance est le complément par rapport à $E_{\max}$

$$U_R(t) = E_{\max} - U_C(t) = E_{\max} \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$$

- On obtient l'expression du courant avec la résistance :

$$I = \frac{U_R(t)}{R} = \frac{E_{\max}}{R} \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$$

- Le chargement du condensateur est très rapide au début et très lent à la fin



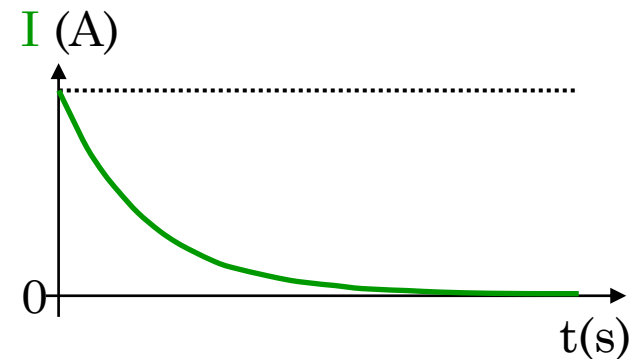
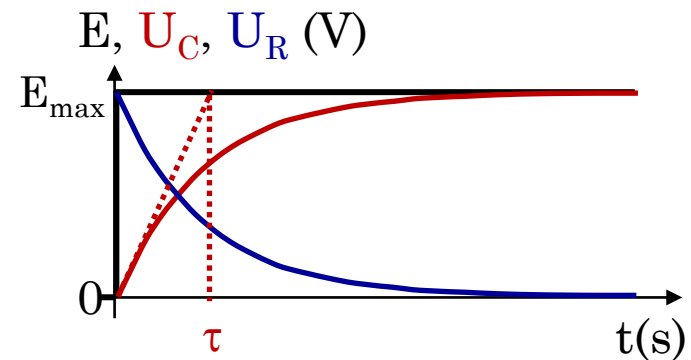
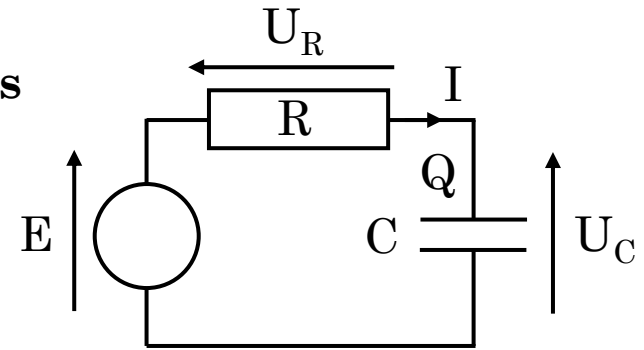
II.2. Réponse à un échelon de tension

□ Charge du condensateur : constante de temps

- Le développement limité de $U_C(t)$ autour de 0 s'écrit :

$$U_{C_lim}(t) = E_{max} \left(1 - \left(1 - \frac{t}{\tau} \right) \right) = E_{max} \cdot \frac{t}{\tau}$$

- C'est donc l'équation d'une droite avec comme point particulier $U_{C_lim} = E_{max}$ lorsque $t = \tau$.
- L'utilisation de la tangente d' $U_C(t)$ à l'origine est une méthode simple pour déterminer la valeur de τ .



$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$	$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$
--	--

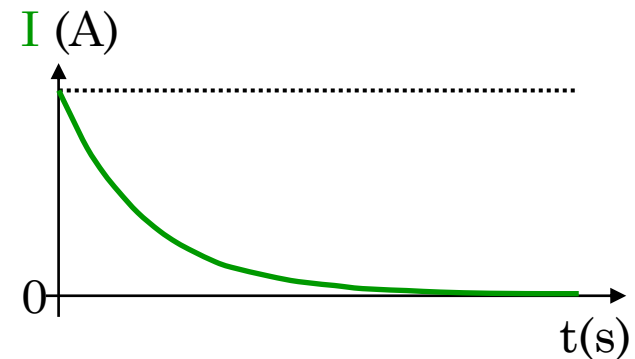
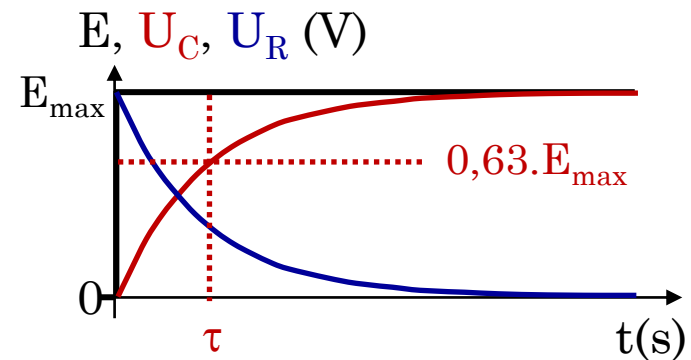
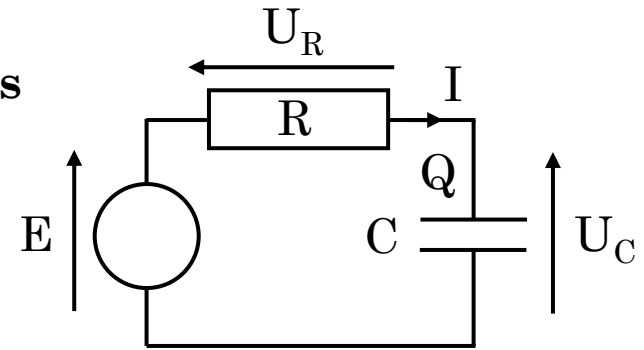
II.2. Réponse à un échelon de tension

□ Charge du condensateur : constante de temps

- Si on reprend l'expression de $U_C(t)$ pour $t = \tau$ on obtient :

$$U_C(t = \tau) = E_{\max} (1 - e^{-1}) \approx 0,63.E_{\max}$$

- Cela implique que si on se place à 63% de $E_{\max}$, le point d'intersection avec la courbe donne la valeur de τ
- En résumé, nous avons 2 méthodes à notre disposition pour déterminer τ .



II.2. Réponse à un échelon de tension

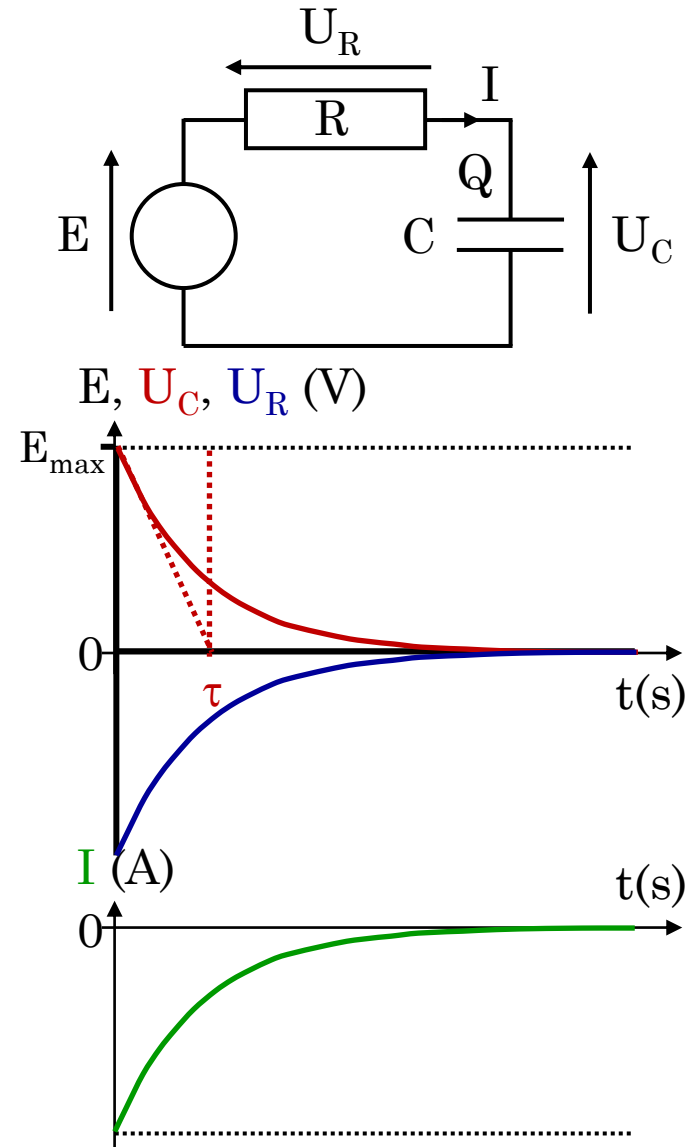
□ Décharge du condensateur

- L'équation différentielle du départ ne change pas contrairement aux conditions aux limites :

$$\begin{cases} U_C(0) = A + B = E_{\max} \\ U_C(\infty) = B = 0 \end{cases}$$

- Dans ce cas, l'équation de la tension aux bornes du condensateur s'écrit :

$$U_C(t) = E_{\max} \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$$



II.2. Réponse à un échelon de tension

□ Résolution numérique du circuit

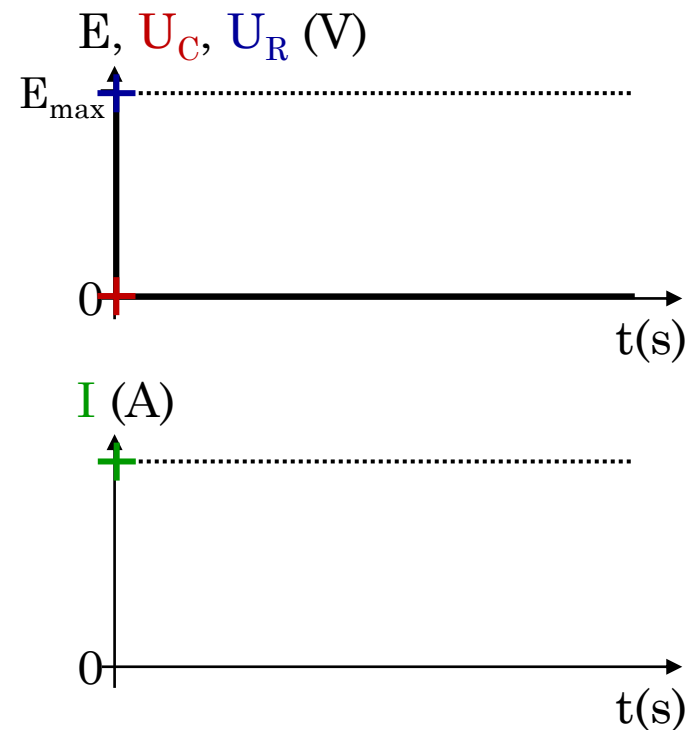
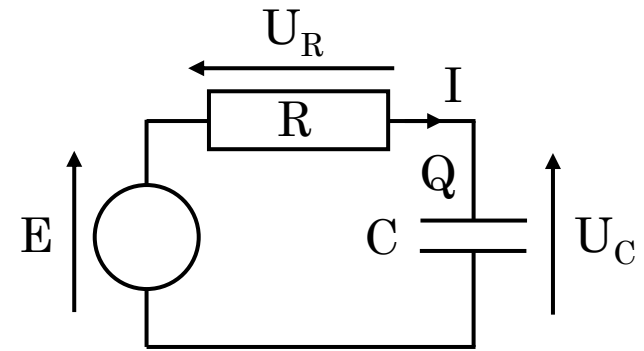
- Nous allons ici voir comment obtenir la forme des signaux en utilisant uniquement les connections du circuit et les relations de base de chaque composant

- A l'instant $t = 0$, nous avons :

$$Q = 0, E = E_{\max}$$

- Cela implique que :

$$U_R = E_{\max}, U_C = 0, I = E_{\max}/R$$



II.2. Réponse à un échelon de tension

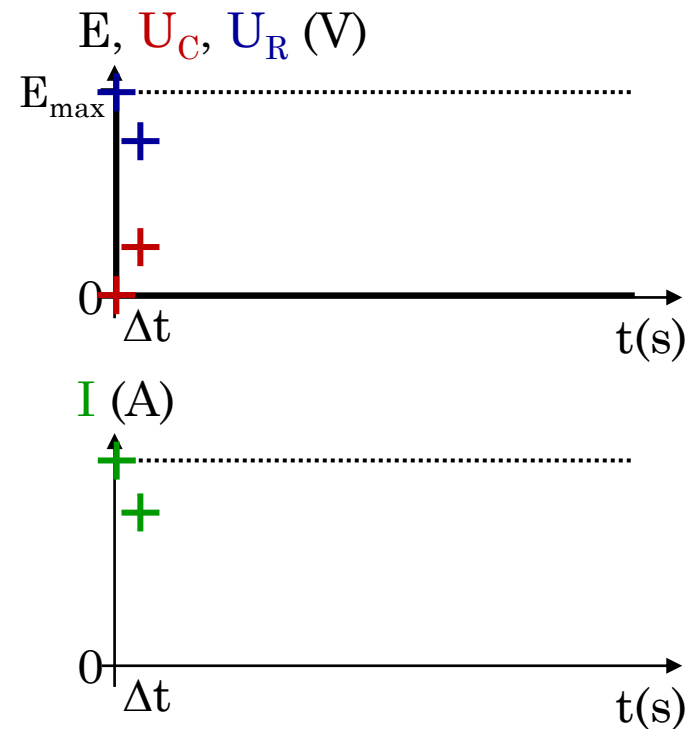
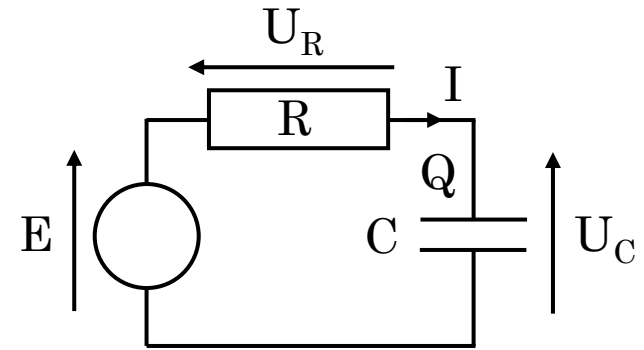
□ Résolution numérique du circuit

- Pour une résolution numérique, les variables sont calculées tous les Δt dont la valeur doit être précisée et qui de surcroît n'est pas forcément constant.

- A l'instant $t = \Delta t$, nous avons :

$$Q(\Delta t) = Q(0) + I(0) \cdot \Delta t \quad \text{car} \quad I = \frac{dQ}{dt}$$

$$U_C = Q(\Delta t) / C, \quad U_R = E_{\max} - U_C, \quad I = U_R / R$$



II.2. Réponse à un échelon de tension

□ Résolution numérique du circuit

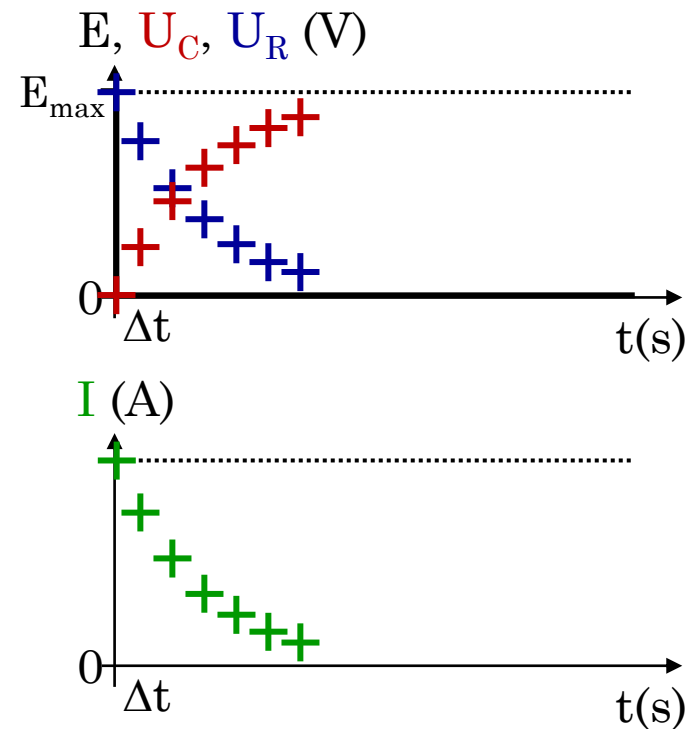
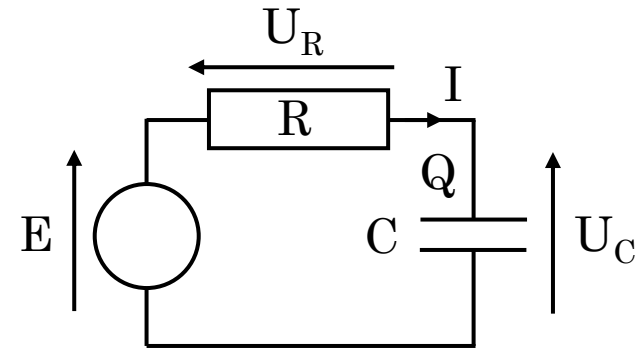
- Pour une résolution numérique, les variables sont calculées tous les Δt dont la valeur doit être précisée et qui ne surcroît n'est pas forcément constant.

- A l'instant $t = \Delta t$, nous avons :

$$Q(\Delta t) = Q(0) + I(0) \cdot \Delta t \quad \text{car} \quad I = \frac{dQ}{dt}$$

$$U_C = Q(\Delta t) / C, \quad U_R = E_{\max} - U_C, \quad I = U_R / R$$

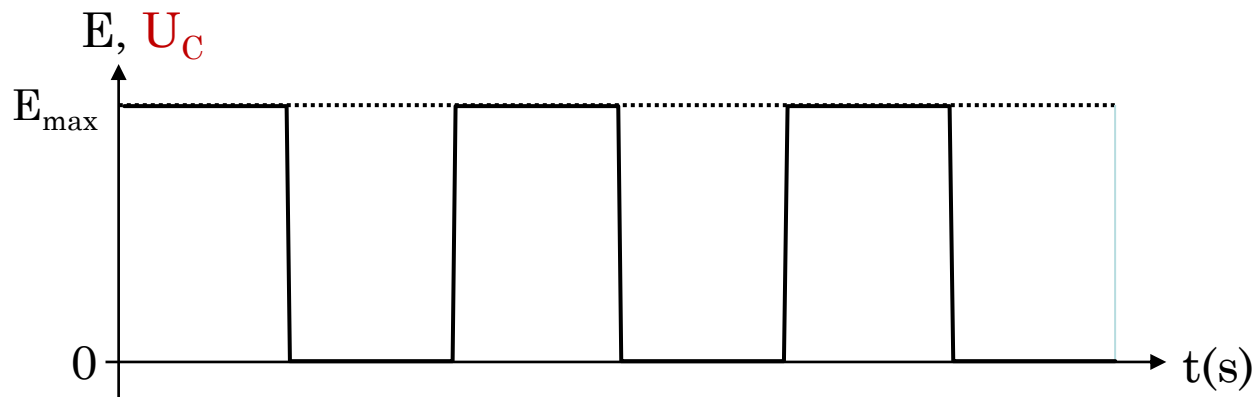
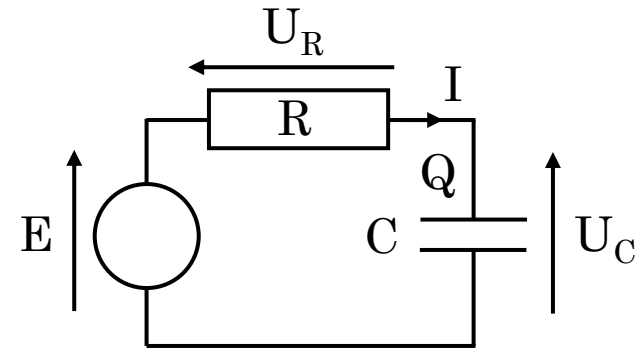
- Les points suivants sont calculés de la même manière
- Cette méthode fonctionne quelque soit la forme du signal $E(t)$.



II.2. Réponse à un échelon de tension

□ Influence de la fréquence d'un signal carré

- On applique un signal $E(t)$ de forme carré que l'on peut aussi appeler « signal d'horloge ».
- C'est ce signal qui cadence les calculs de votre ordinateur, tablette, smartphone ...
- Les composants électroniques de ces appareils sont constitués de résistances et condensateurs... Ce que nous allons étudier va montrer que l'on ne peut pas monter indéfiniment la fréquence d'horloge pour une technologie donnée.



$$R = 100 \, \Omega$$

$$C = 1 \, \mu\text{F}$$

$$\tau = 0.1 \, \text{ms}$$

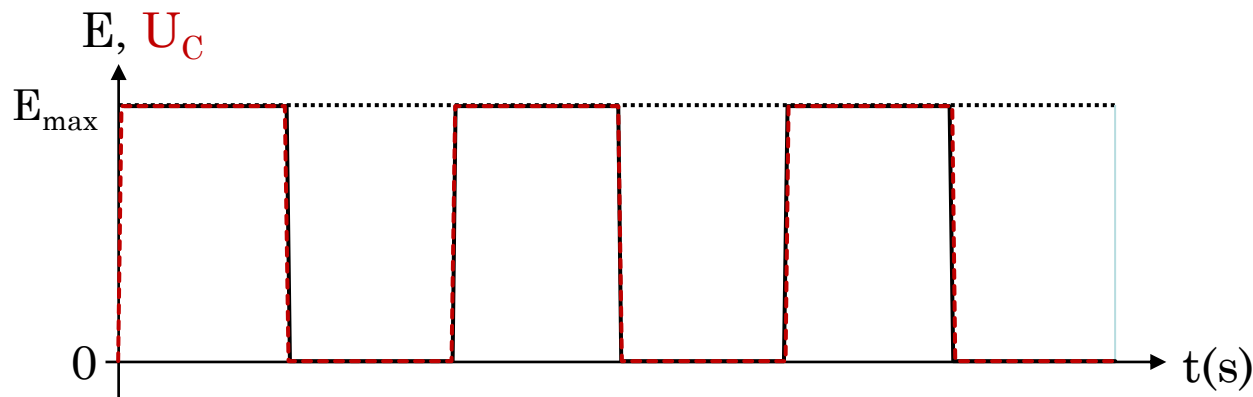
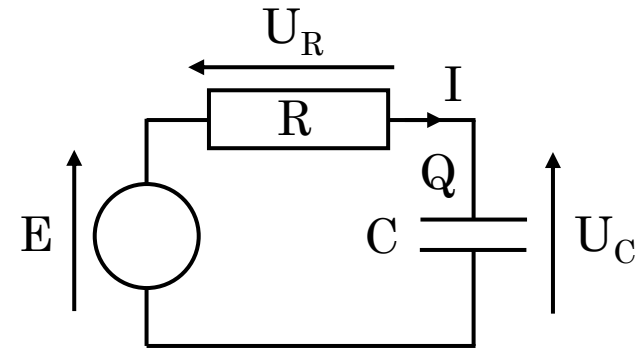
$$F = 1 \, \text{Hz}$$

$$T = 1 \, \text{s}$$

II.2. Réponse à un échelon de tension

□ Influence de la fréquence d'un signal carré

- Pour un signal « très lent » ($T \gg \tau$), les charges et décharges sont tellement rapides, que le signal $U_C(t)$ se confond avec $E(t)$.



$$R = 100 \, \Omega$$

$$C = 1 \, \mu\text{F}$$

$$\tau = 0.1 \, \text{ms}$$

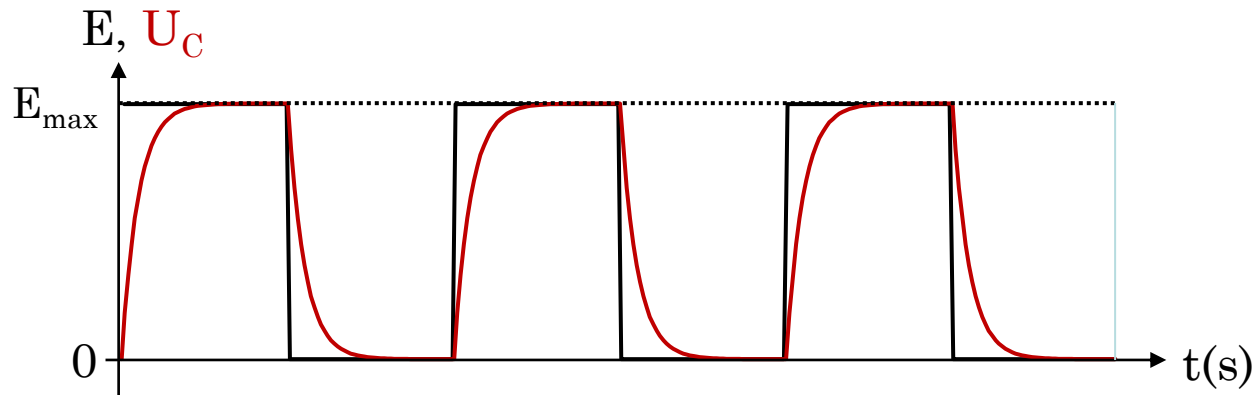
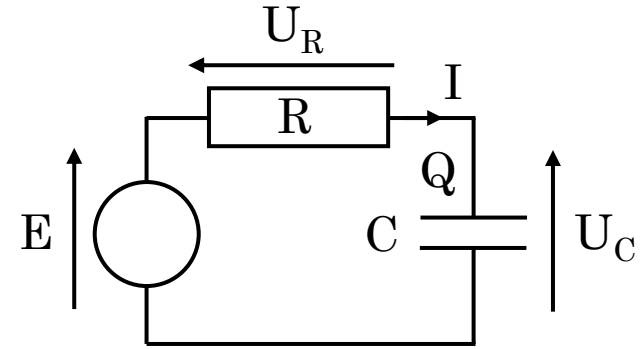
$$F = 1 \, \text{Hz}$$

$$T = 1 \, \text{s}$$

II.2. Réponse à un échelon de tension

□ Influence de la fréquence d'un signal carré

- Pour un signal « très lent » ($T \gg \tau$), les charges et décharges sont tellement rapides, que le signal $U_C(t)$ se confond avec $E(t)$.
- Pour un signal un peu plus « rapide » ($T > \tau$), on voit nettement apparaître les charges et décharges que nous venons de traiter.



$$R = 100 \, \Omega$$

$$C = 1 \, \mu\text{F}$$

$$\tau = 0.1 \, \text{ms}$$

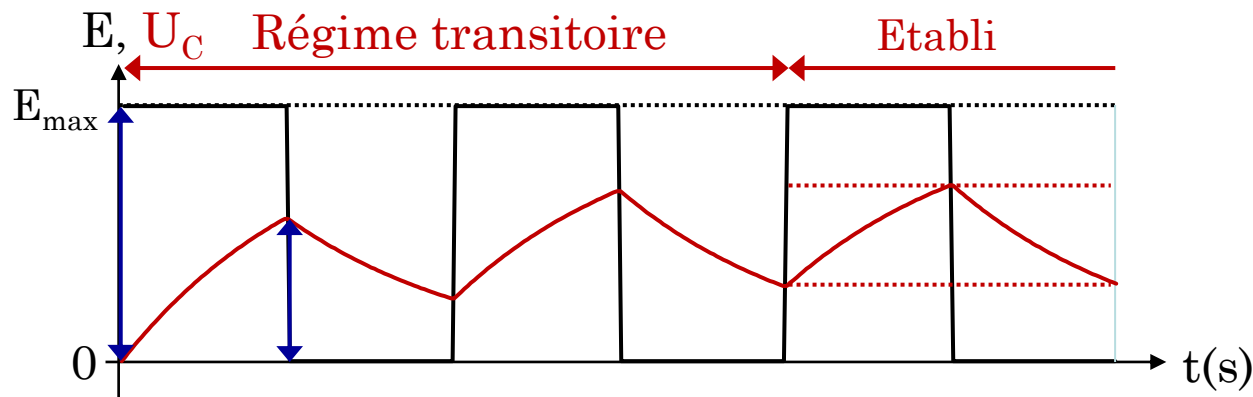
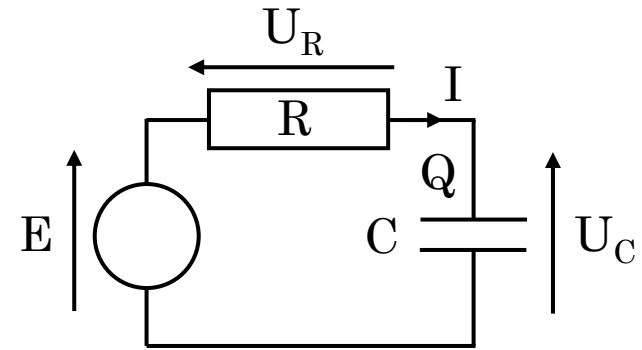
$$F = 500 \, \text{Hz}$$

$$T = 2 \, \text{ms}$$

II.2. Réponse à un échelon de tension

□ Influence de la fréquence d'un signal carré

- Si $E_{\max}$ correspond à la valeur de tension pour le « 1 » logique, nous voyons qu'au niveau du condensateur nous ne retrouvons pas cet état (ni le « 0 » logique d'ailleurs).
- Les calculs des circuits numériques seront erronés !



$$R = 100 \, \Omega$$

$$C = 1 \, \mu\text{F}$$

$$\tau = 0.1 \, \text{ms}$$

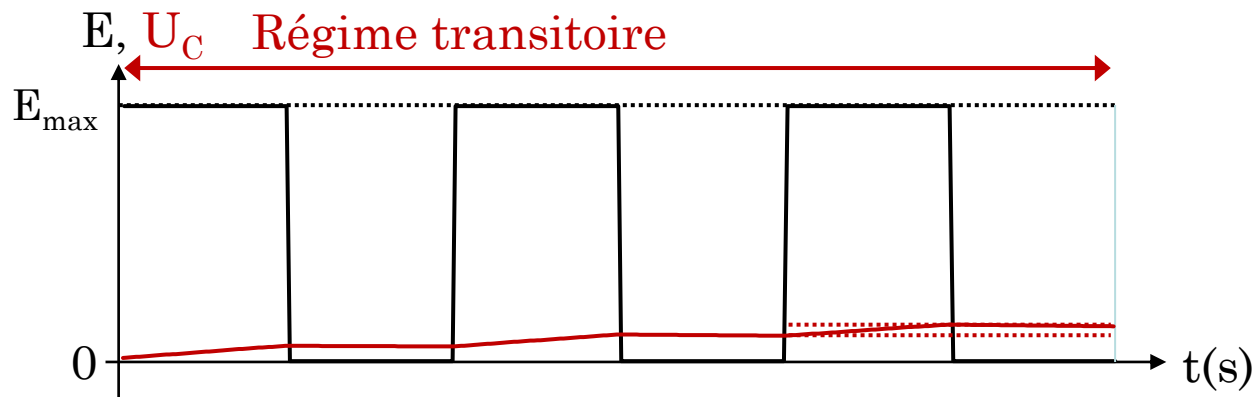
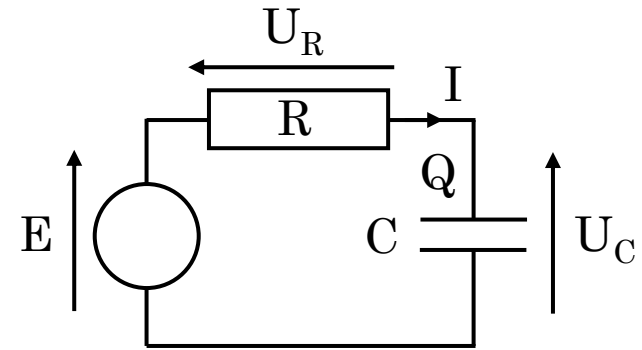
$$F = 6 \, \text{kHz}$$

$$T = 0.17 \, \text{ms}$$

II.2. Réponse à un échelon de tension

□ Influence de la fréquence d'un signal carré

- Pour un signal encore plus « rapide » ($T \ll \tau$), le phénomène s'accroît.
- La variation de $U_C(t)$ sur une période a fortement diminuée et se rapproche de 0.
- A noter que le courant à $t = 0$ est toujours le même dans notre simulation. Comme Δt devient de plus en plus petit quand F augmente, cela impose aussi un ΔQ de plus en plus petit.



$$R = 100 \, \Omega$$

$$C = 1 \, \mu\text{F}$$

$$\tau = 0.1 \, \text{ms}$$

$$F = 100 \, \text{kHz}$$

$$T = 1 \, \mu\text{s}$$

II.3. Régime sinusoïdal forcé

❑ Choix de l'outils mathématique

- A présent, nous allons manipuler des signaux sinusoïdaux :

$$U(t) = U_0 \cdot \cos(\omega t + \phi)$$

Où ω est la pulsation (en rad/s ou °/s) et ϕ la phase (en rad ou °). On rappelle que $\omega = 2\pi F$ où F est la fréquence (en Hertz, H)

- Il existe 3 méthodes pour faire des manipulations sur les signaux (addition, soustraction, division, multiplications) :
 - ✓ Méthode algébrique avec des cosinus et sinus ... donc fastidieux
 - ✓ Méthode graphique (représentation de Fresnel) avec la manipulation de vecteurs donc pas forcément plus simple
 - ✓ Méthode des nombres complexes couramment utilisée en électronique en raison de sa simplicité de mise en œuvre comparé aux 2 autres méthodes.

II.3. Régime sinusoïdal forcé

□ Rappels sur la notation complexe

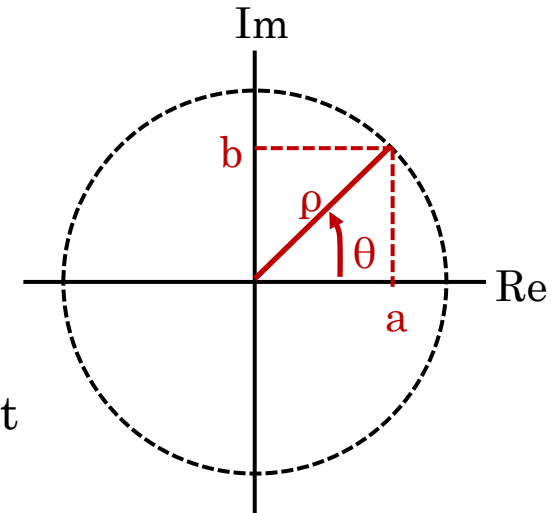
- Un nombre complexe a pour expression :

$$z = a + jb = \rho [\cos(\theta) + j.\sin(\theta)] = \rho.\exp(j\theta)$$

- a et b sont respectivement les parties réelle et imaginaire. ρ s'appelle le module et θ l'argument.

- Sans oublier que $j^2 = -1$

- Le cercle trigonométrique permet d'écrire $\rho^2 = a^2 + b^2$ et $\tan(\theta) = b/a$



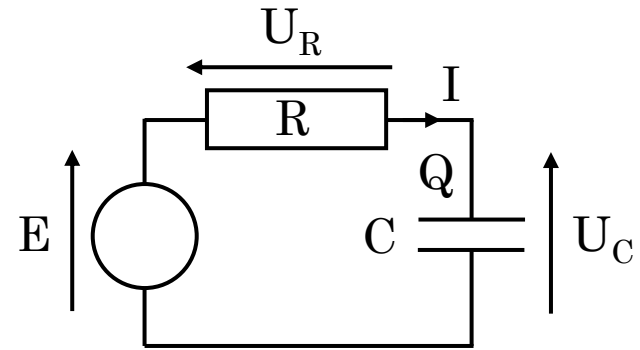
II.3. Régime sinusoïdal forcé

□ Impédance complexe du condensateur

- La résolution de l'équation différentielle est considérablement simplifiée en utilisant la notation complexe des impédances
- Le calcul des variables se résume à la détermination de l'amplitude des variables et à la phase (la fréquence étant la même dans tout le circuit).
- L'impédance complexe d'un condensateur est :

$$Z_C = \frac{U_C}{\underline{I}} = \frac{U_C}{jC\omega \underline{U}_C} = \frac{1}{jC\omega}$$

$$\underline{I} = jC\omega \underline{U}_C$$



II.3. Régime sinusoïdal forcé

□ Equation de la maille

- Comme le courant qui traverse une résistance est en phase avec la tension on a $Z_R = R$, l'équation de la maille s'écrit alors :

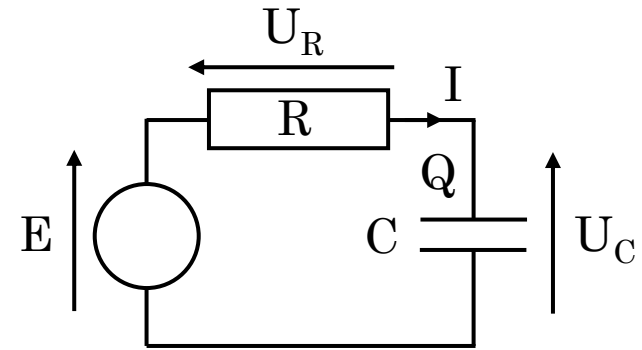
$$\underline{E} = R.\underline{I} + Z_C.\underline{I} = \left(R + \frac{1}{jC\omega} \right) \underline{I}$$

- On peut aussi écrire cette équation pour faire apparaitre la dépendance de $\underline{U}_C$ par rapport à $\underline{E}$:

$$\underline{E} = j\omega RC.\underline{U}_C + \underline{U}_C = (1 + j\omega RC)\underline{U}_C$$

- Pour finir, $\underline{U}_R$ peut s'exprimer en fonction de $\underline{E}$:

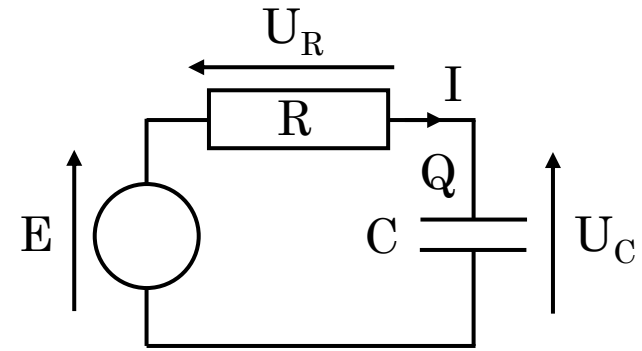
$$\underline{E} = \underline{U}_R + \frac{1}{j\omega C} \underline{I} = \underline{U}_R + \frac{1}{j\omega RC} \underline{U}_R = \left(1 + \frac{1}{j\omega RC} \right) \underline{U}_R$$



II.4. Le filtre passe bas

□ Fonction de transfert

- Le signal $E(t)$ est de la forme : $E(t) = E_0 \cdot \cos(\omega t)$
- L'objectif est de déterminer l'amplitude et la phase de la tension $U_C(t)$: $U_C(t) = U_{C0} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$



- En notation complexe, le rapport entre $\underline{E}$ et $\underline{U_C}$ s'appelle la fonction de transfert et s'écrit :

$$G_C(\omega) = \frac{\underline{U_C}}{\underline{E}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

- On peut aussi trouver cette relation en utilisant le diviseur de tension :

$$G_C(\omega) = \frac{\underline{U_C}}{\underline{E}} = \frac{Z_C}{Z_C + R} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + R} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

- La fonction de transfert a aussi pour expression : $G_C(\omega) = A_{VC} \cdot \exp(j\varphi)$
 où A_{VC} est le gain et φ le déphasage.

II.4. Le filtre passe bas

□ Expressions du gain et de la phase

- Le gain A_{VC} s'obtient avec le module de la fonction de transfert :

$$A_{VC}(\omega) = |G_C(\omega)| = \frac{1}{|1 + j\omega RC|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

- Pour les fréquences limites nous avons :

$$\begin{cases} A_{VC}(\omega = 0) = 1 = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \\ A_{VC}(\omega \rightarrow \infty) = 0 \end{cases}$$

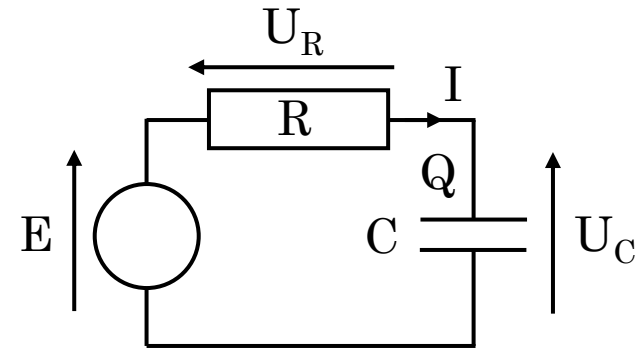
- $A_{VC}(F = 0)$ correspond au gain en statique

- La phase a pour expression :

$$\varphi(\omega) = \arg(G_C) = -\arg(1 + j\omega RC) = \arctan(-\omega RC)$$

- Pour les fréquences limites nous avons :

$$\begin{cases} \varphi(\omega = 0) = 0 \\ \varphi(\omega \rightarrow \infty) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

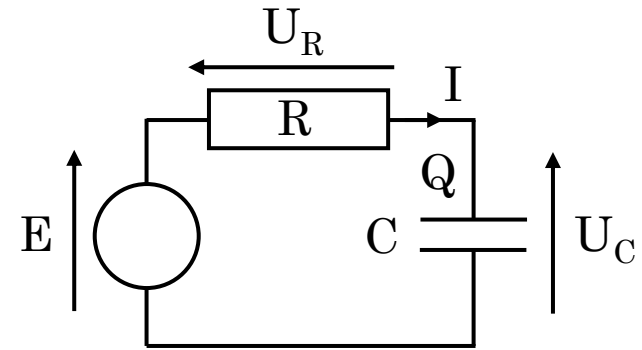


II.4. Le filtre passe bas

□ Expressions du gain et de la phase

- Au finale, nous obtenons l'expression de la tension $U_C(t)$:

$$\begin{cases} E(t) = E_0 \cdot \cos(\omega t) \\ U_C(t) = \frac{E_0}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \cos(\omega t + \arctan(-\omega RC)) \end{cases}$$



II.4. Le filtre passe bas

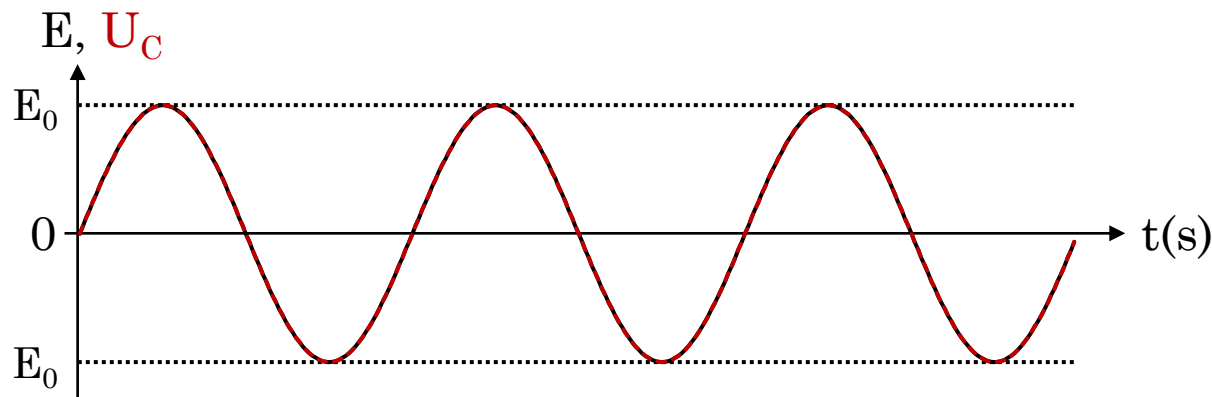
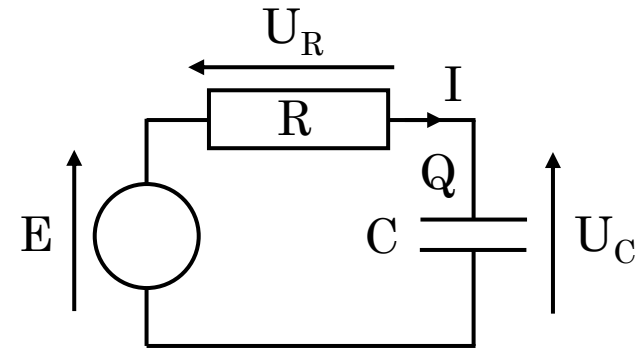
□ Visualisation des courbes en fréquence

▪ On simule E et U_C pour des valeurs particulières de R et C avec $\tau = RC = 0.1 \mu s$

▪ Pour une fréquence de 1 Hz, nous obtenons

$$E(t) = U_C(t)$$

▪ Cela signifie qu'on laisse le condensateur se charger ou se décharger suffisamment vite pour que sa tension suive celle du générateur.



$$R = 100 \Omega$$

$$C = 1 \mu F$$

$$F = 1 \text{ Hz}$$

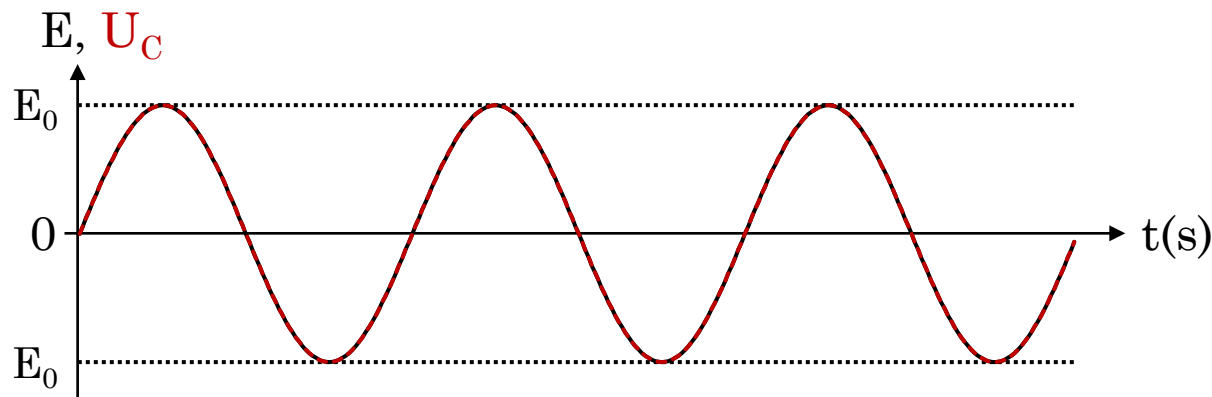
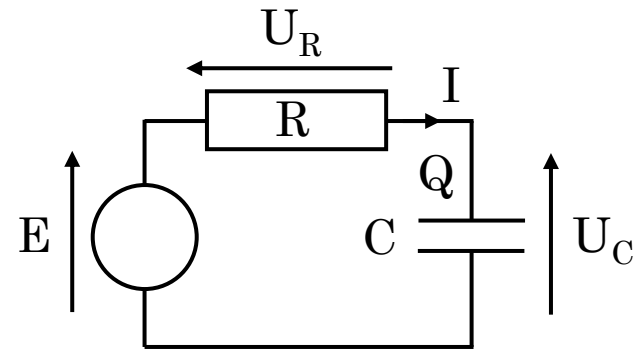
$$A_{VC} = 1$$

$$\varphi = 0^\circ$$

II.4. Le filtre passe bas

□ Visualisation des courbes en fréquence

- Visuellement, on pourrait se dire que $U_R = 0$!
- Ce n'est évidemment pas le cas sinon la charge du condensateur ne pourrait pas changer.
- Pour cet exemple, le courant $I(t)$ varie dans l'intervalle $\pm 6.28 \mu\text{A}$



$$R = 100 \, \Omega$$

$$C = 1 \, \mu\text{F}$$

$$f = 1 \, \text{Hz}$$

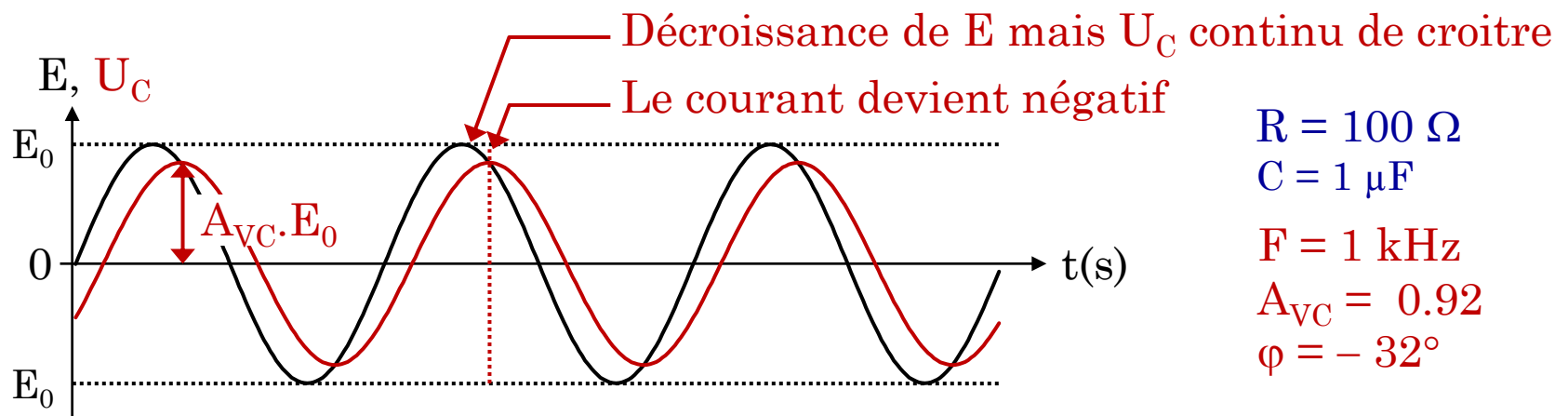
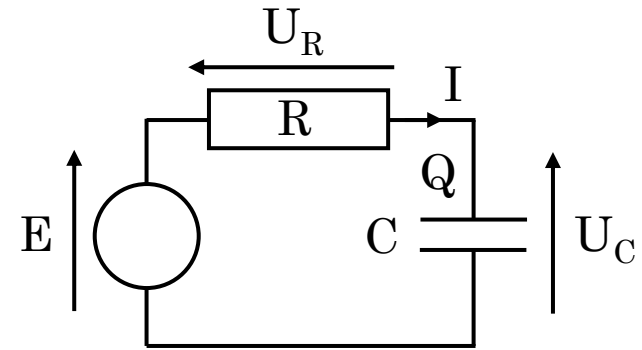
$$A_{VC} = 1$$

$$\varphi = 0^\circ$$

II.4. Le filtre passe bas

□ Visualisation des courbes en fréquence

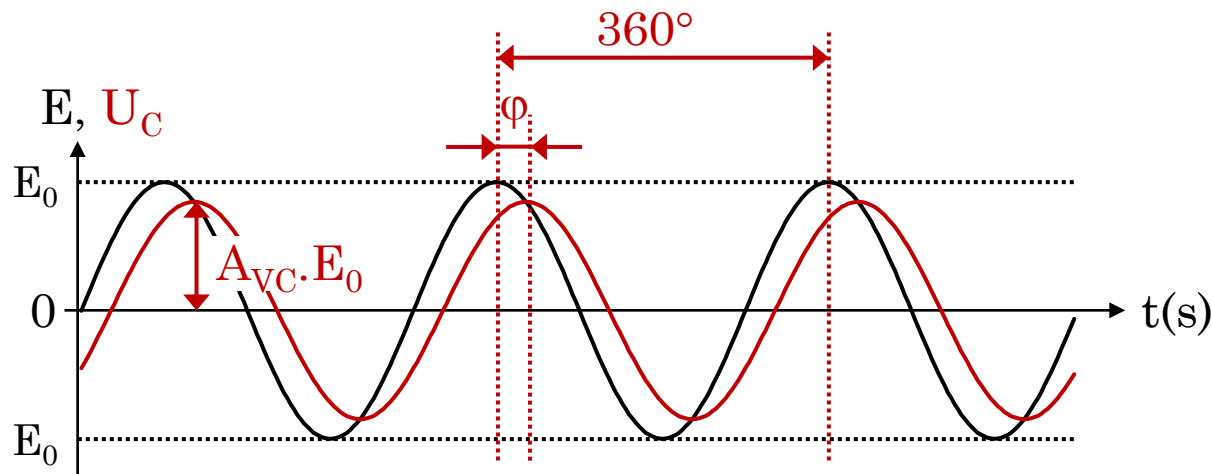
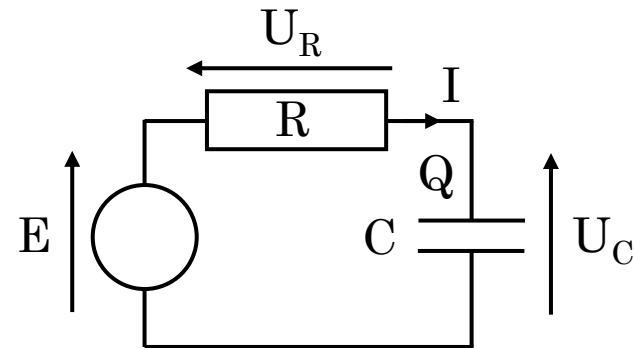
- On monte à présent la fréquence, le gain diminue et la phase augmente (en valeur absolue)
- Le condensateur n'a plus le temps de se charger et de se décharger suffisamment vite pour suivre les variations du générateur. Il apparaît alors un retard de U_C par rapport à E .



II.4. Le filtre passe bas

□ Visualisation des courbes en fréquence

- A partir de mesures, le rapport entre les amplitudes des sinusöides permet déterminer le gain.
- A partir de mesures, le décalage entre les 2 sinusöides permet de déterminer le déphasage de U_C par rapport à E .

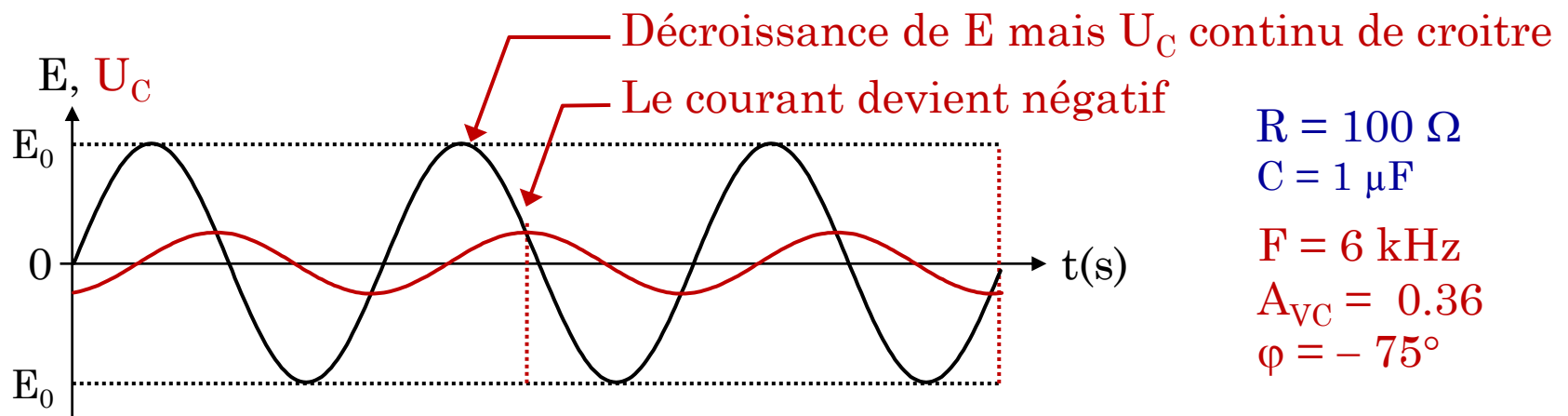
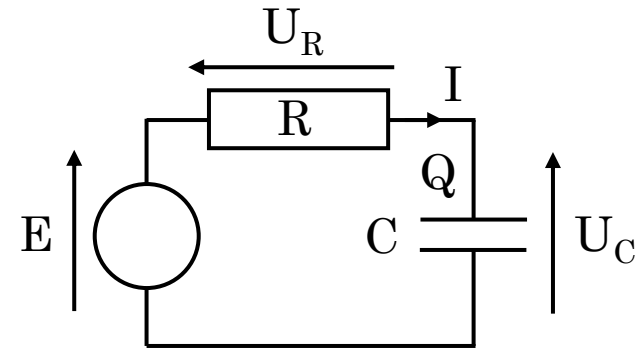


$$\begin{aligned}
 R &= 100 \, \Omega \\
 C &= 1 \, \mu\text{F} \\
 F &= 1 \, \text{kHz} \\
 A_{VC} &= 0.92 \\
 \varphi &= -32^\circ
 \end{aligned}$$

II.4. Le filtre passe bas

□ Visualisation des courbes en fréquence

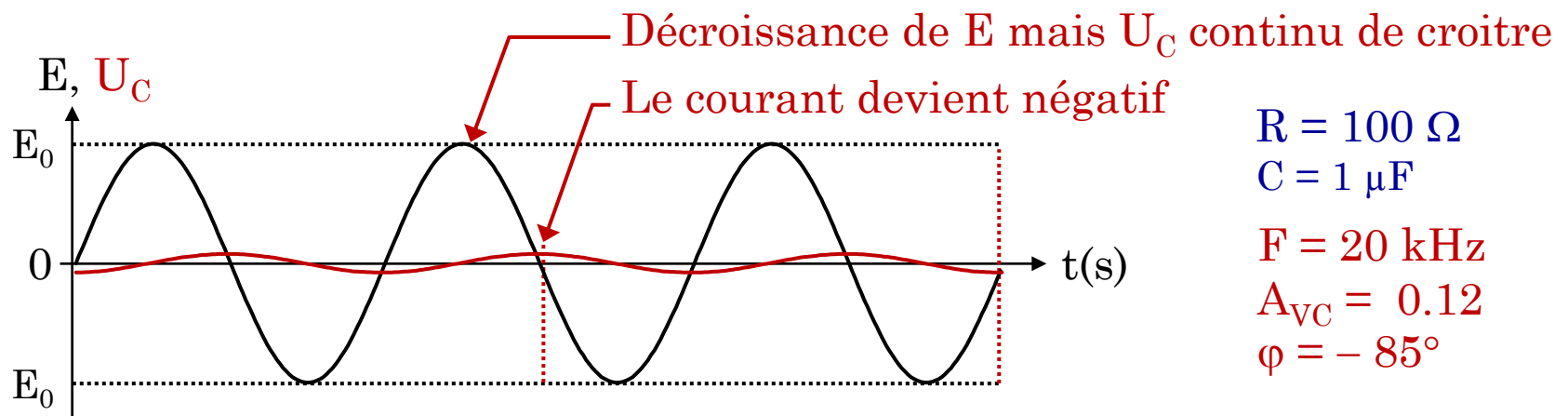
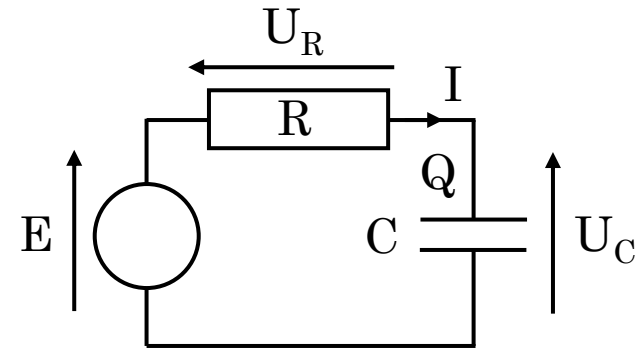
- On monte encore la fréquence, le gain diminue et la phase en augmente (en valeur absolue)
- Le condensateur a encore moins le temps de se charger et de se décharger suffisamment vite pour suivre les variations du générateur. Le retard de U_C augmente par rapport à E et son amplitude diminue.



II.4. Le filtre passe bas

Visualisation des courbes en fréquence

- On monte encore la fréquence, le gain diminue et la phase en augmente (en valeur absolue)
- Le condensateur a encore moins le temps de se charger et de se décharger suffisamment vite pour suivre les variations du générateur. Le retard de U_C augmente par rapport à E et son amplitude diminue.



II.4. Le filtre passe bas

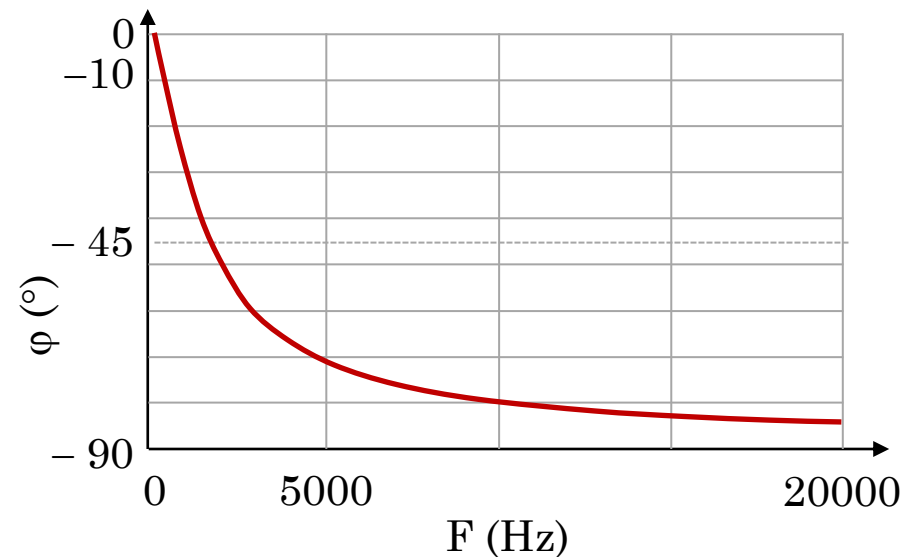
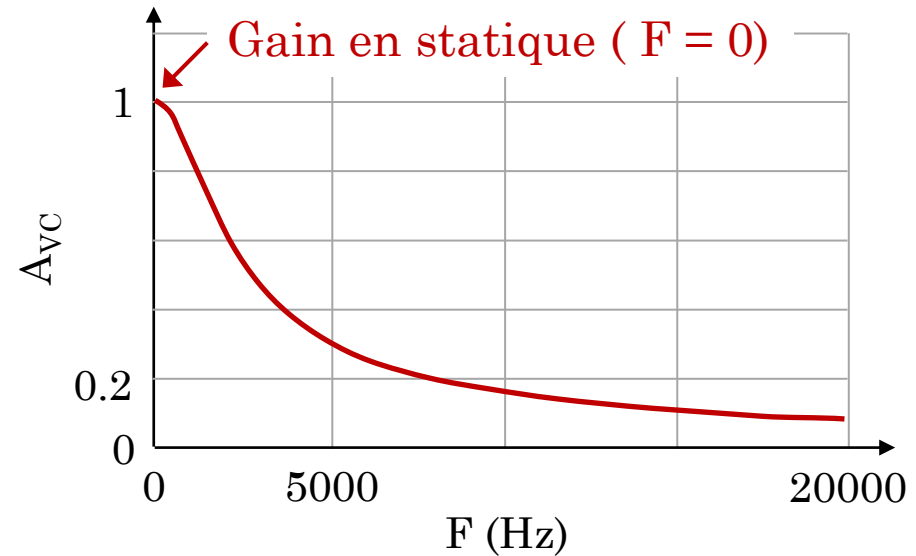
□ Courbes de gain et de phase

- On trace les courbes $A_{VC}(F)$ et $\varphi(F)$ en utilisant les expressions trouvées précédemment :

$$A_{VC}(F) = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi F.RC)^2}}$$

$$\varphi(F) = \arctan(-2\pi F.RC)$$

- Comme attendu avec les valeurs aux limites, nous constatons que le gain tend vers 0 et la phase vers -90°



II.4. Le filtre passe bas

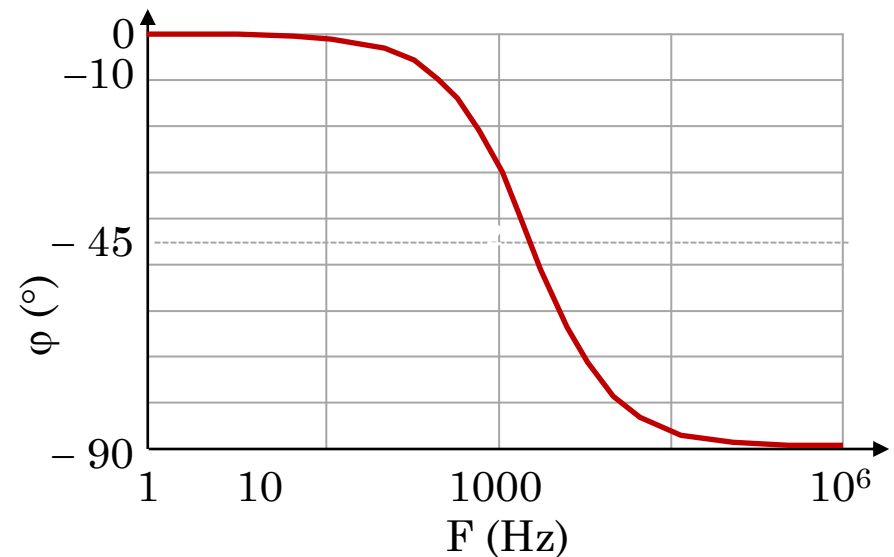
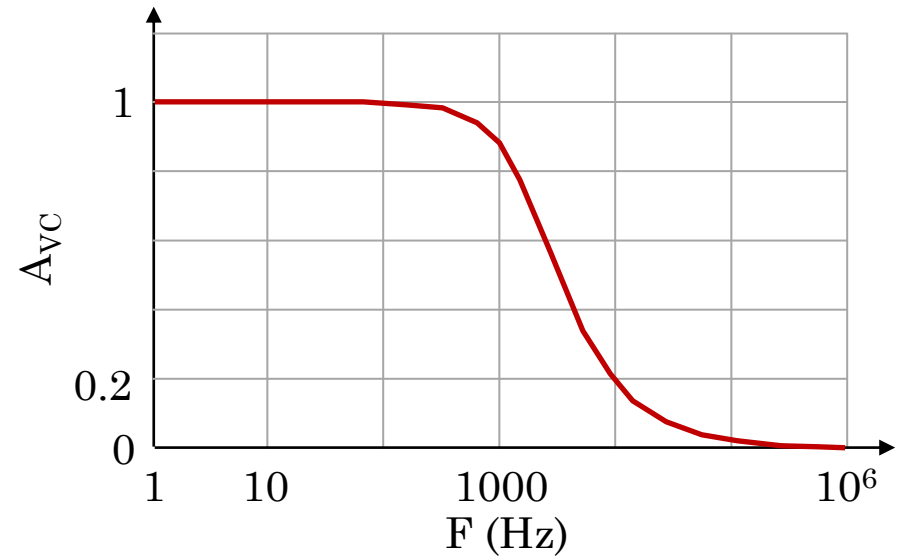
□ Courbes de gain et de phase

- On trace les courbes $A_{VC}(F)$ et $\varphi(F)$ en utilisant les expressions trouvées précédemment :

$$A_{VC}(F) = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi F.RC)^2}}$$

$$\varphi(F) = \arctan(-2\pi F.RC)$$

- Comme attendu avec les valeurs aux limites, nous constatons que le gain tend vers 0 et la phase vers -90°
- Usuellement, l'axe des fréquences est tracé en échelle logarithmique



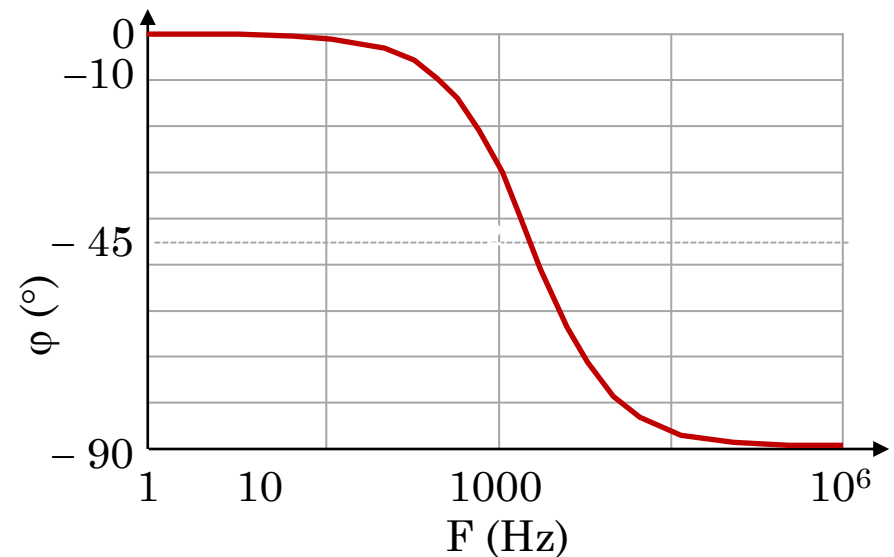
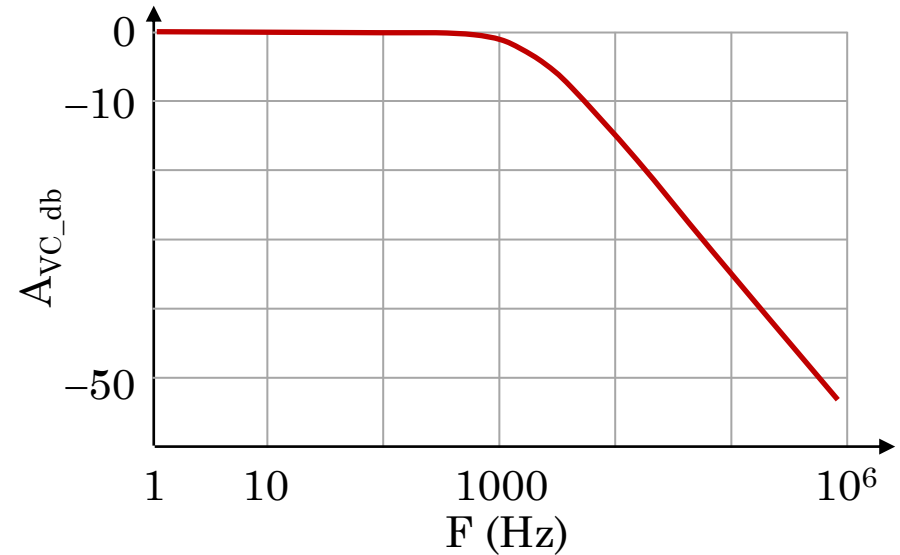
II.4. Le filtre passe bas

□ Courbes de gain et de phase

- On a aussi l'habitude de tracer l'axe A_{VC} en échelle logarithmique.
- Pour cela on utilise les décibels (db)

$$A_{VC_db}(F) = 20 \cdot \log \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi F \cdot RC)^2}} \right)$$

$$= -10 \cdot \log \left(1 + (2\pi F \cdot RC)^2 \right)$$



II.4. Le filtre passe bas

□ Fréquence de coupure

- En se basant sur l'expression du gain :

$$A_{VC}(F) = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi F.RC)^2}}$$

- La fréquence de coupure est définie par :

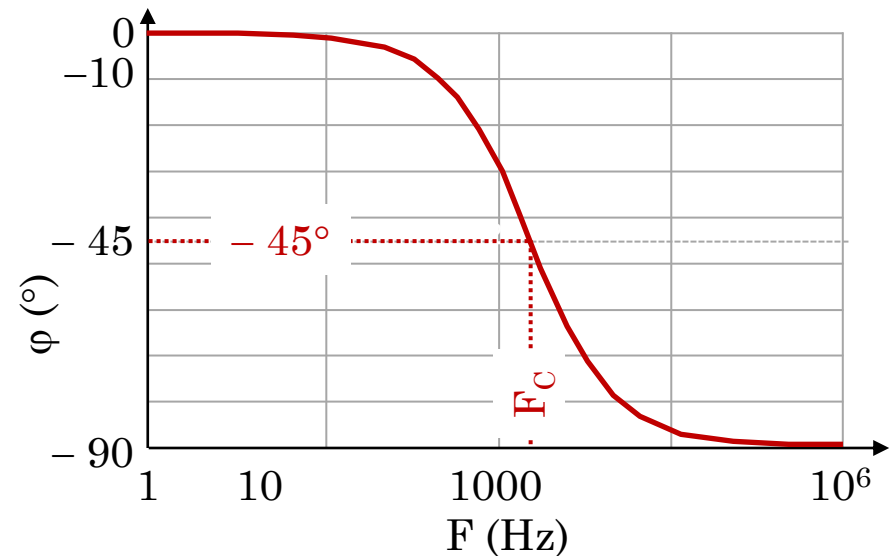
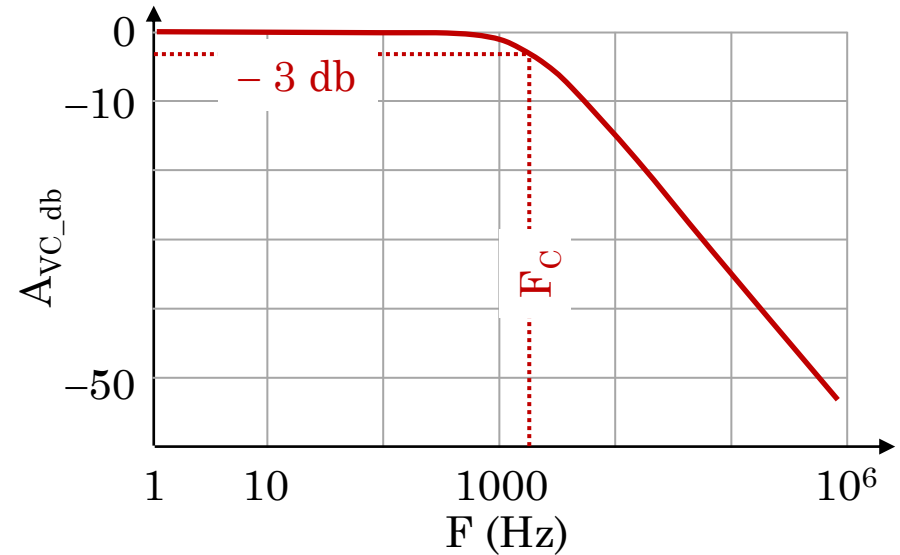
$$F_C = \frac{1}{2\pi RC}$$

- Lorsque $F = F_C$ nous obtenons :

$$A_{VC}(F_C) = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$$

$$A_{VC_db}(F_C) = -3$$

$$\varphi(F_C) = -45^\circ$$



II.4. Le filtre passe bas

□ Fréquence de coupure

- On définit la bande passante comme la bande de fréquence pour laquelle le gain chute d'au maximum 3db

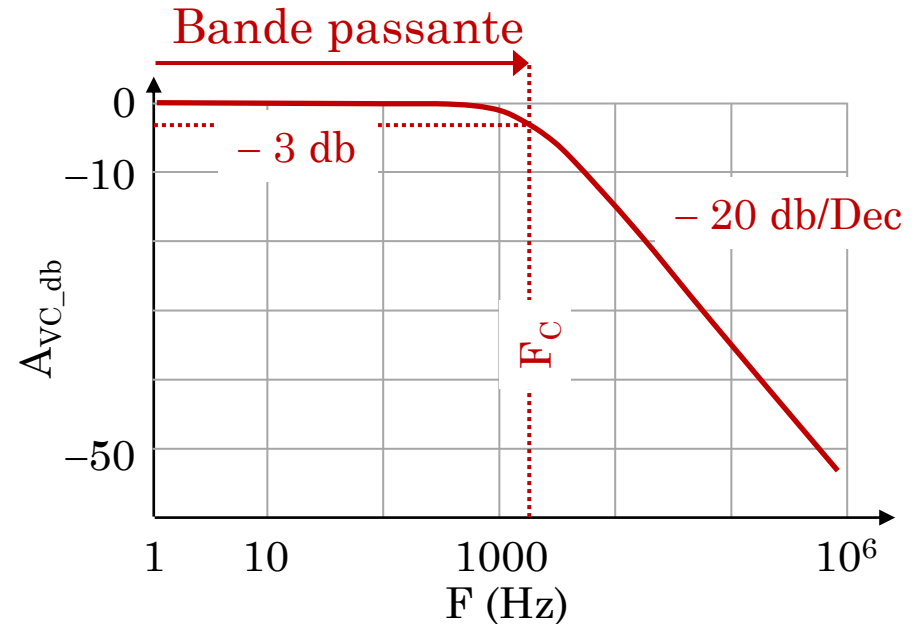
□ Sélectivité

- Cela correspond à la décroissance du gain en dehors de la bande passante. On la donne en db/Dec (Decade de fréquence) :

$$\text{Sélectivité} = A_{\text{VC_db}}(100.F_c) - A_{\text{VC_db}}(10.F_c) = -10 \log(1 + 100^2) + 10 \log(1 + 10^2)$$

$$\text{Sélectivité} = -10 \log(100^2) + 10 \log(10^2) = -20(2 - 1) = -20 \text{ db / Dec}$$

- Cette valeur correspond à un filtre du 1^{er} ordre (– 40 db/Dec 2^{ième} ordre ...)



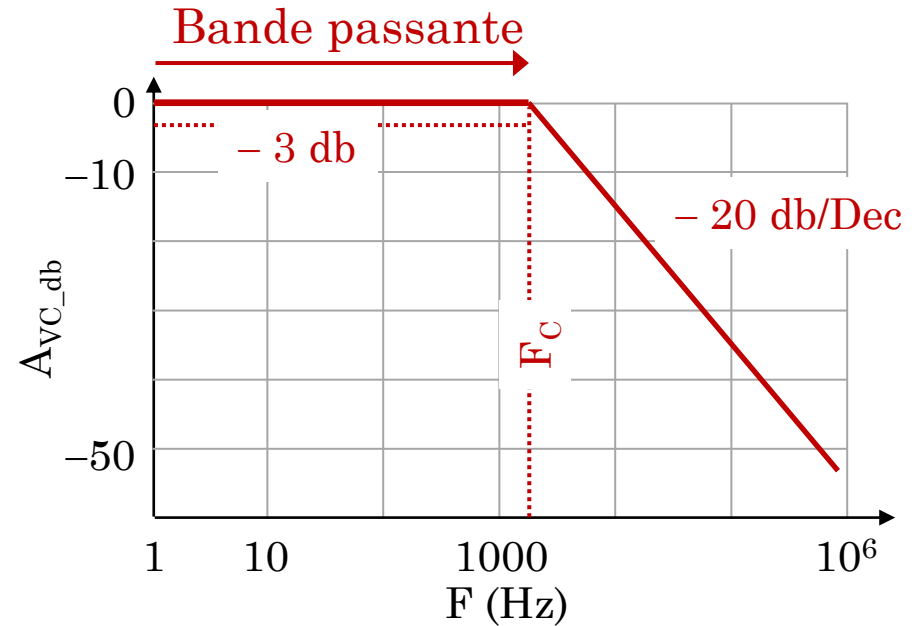
II.4. Le filtre passe bas

□ Tracé asymptotique

- Pour simplifier le tracer du gain, on peut aussi représenter sa forme en utilisant uniquement les asymptotes

□ Basses et hautes fréquences

- On appelle basses fréquences les fréquences inférieures à F_C
- On appelle hautes fréquences les fréquences supérieures à F_C
- Même si ce n'est pas tout à fait exacte, on dit qu'un filtre passe bas laisse passer les basses fréquences et coupe les hautes fréquences

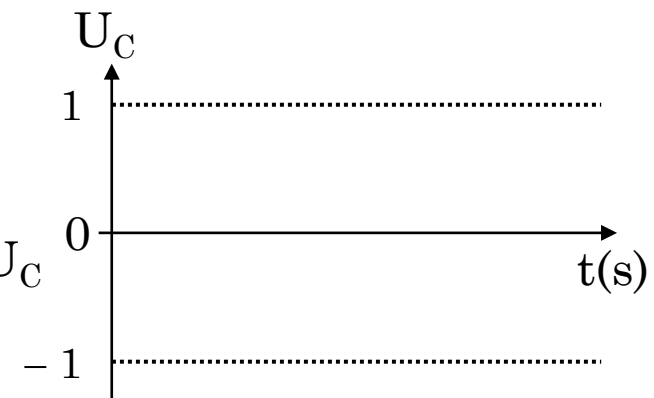
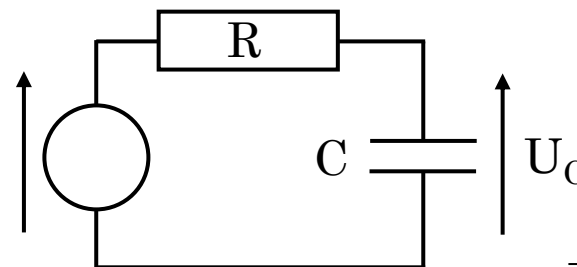
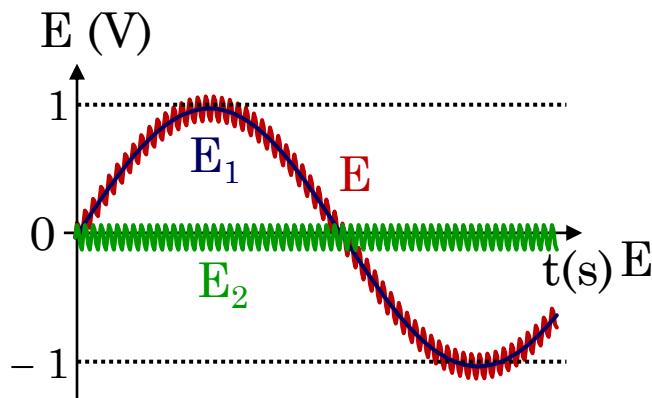
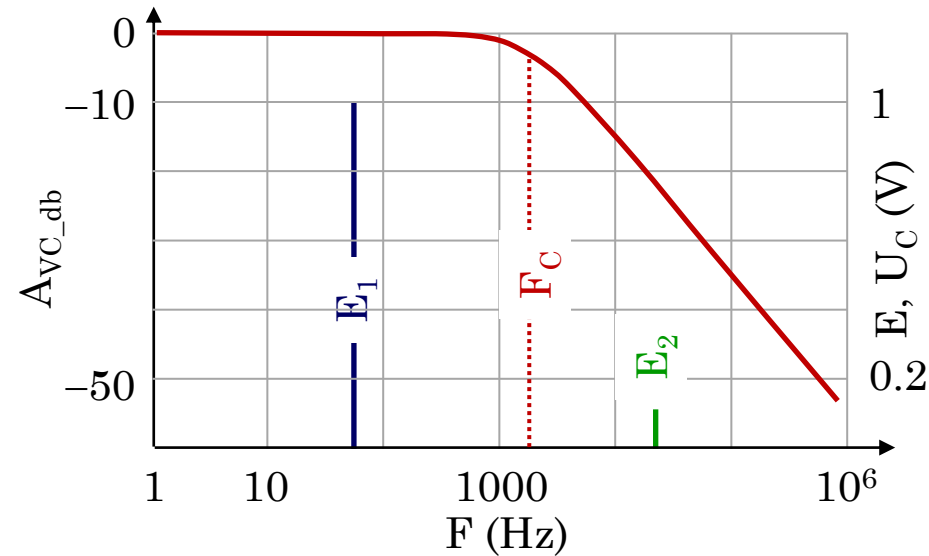


II.4. Le filtre passe bas

□ Filtrage d'un signal

■ Soit une tension sinusoïdale E_1 de fréquence 100 Hz d'amplitude 1 V sur laquelle s'est greffée une tension parasite E_2 de fréquence 40 kHz et d'amplitude 0.1 V.

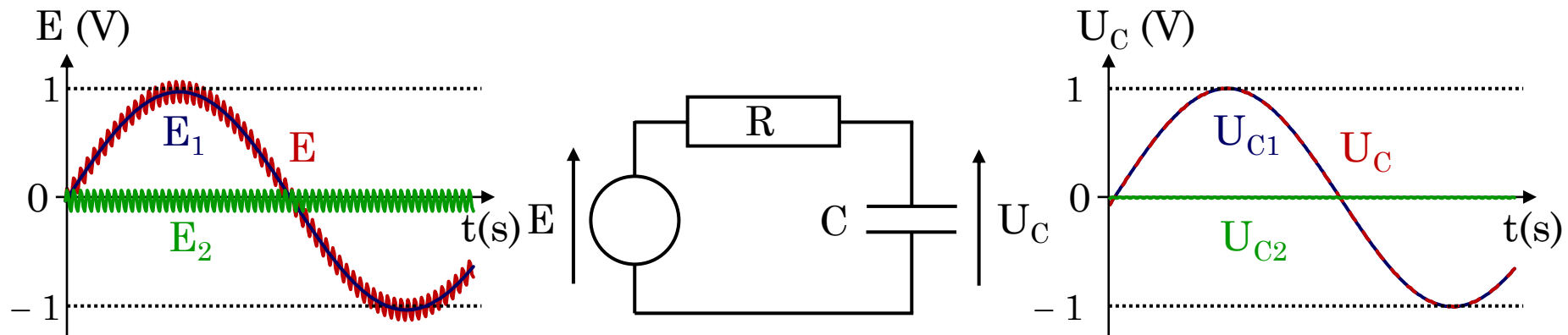
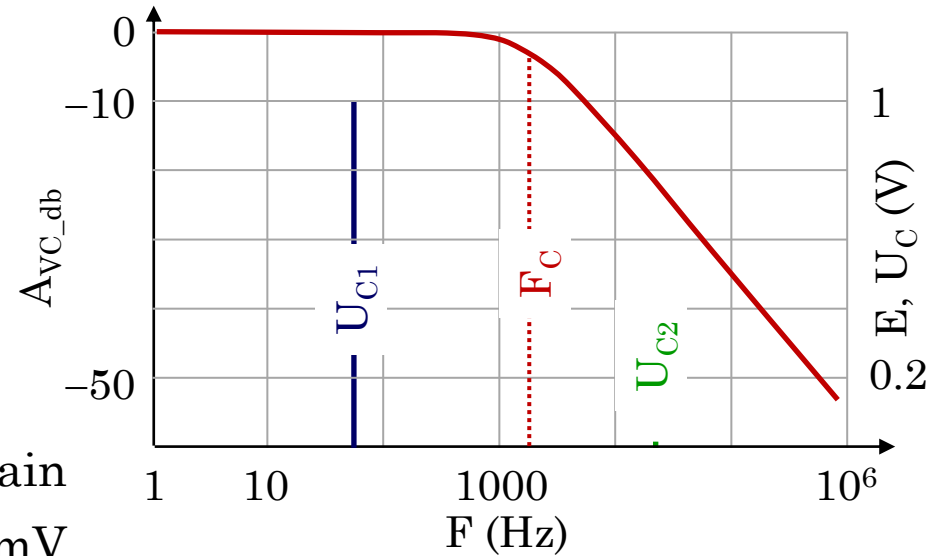
■ Le rôle de ce filtre passe bas est d'atténuer la tension E_2 : $E = E_1 + E_2 \longrightarrow U_C \approx E_1$



II.4. Le filtre passe bas

□ Filtrage d'un signal

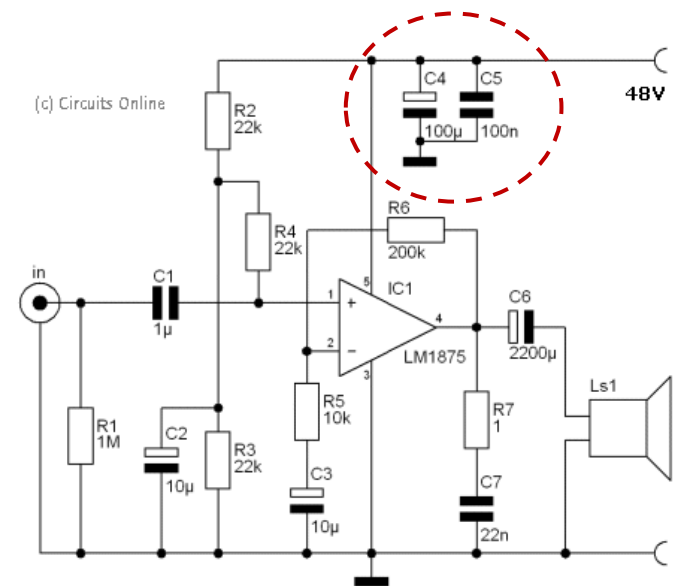
- En raison de sa fréquence suffisamment faible, le signal E_1 se retrouve quasi-intacte aux bornes du condensateur.
- Le signal E_2 est multiplié par le gain 0.04 ce qui donne une amplitude de 4 mV pour U_{C2}



II.4. Le filtre passe bas

□ Condensateur de découplage

- Le condensateur du filtre passe bas est aussi appelé condensateur de découplage, il sert à « lisser » les appels de courant sur une alimentation et donc à éviter les chutes de tension.
- Plus largement, elles permettent de fixer la tension en un point du circuit.
- On peut voir ces condensateurs comme des réserves de charges qui sont libérées lorsque que le circuit en a besoin



II.5. Signal et transformée de Fourier

□ Décomposition en série de Fourier

- La transformée de Fourier est un outil mathématique qui permet de décomposer un signal en somme de sinus et cosinus :

$$V(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)]$$

- Dans le cas d'un signal carré, on trouve :

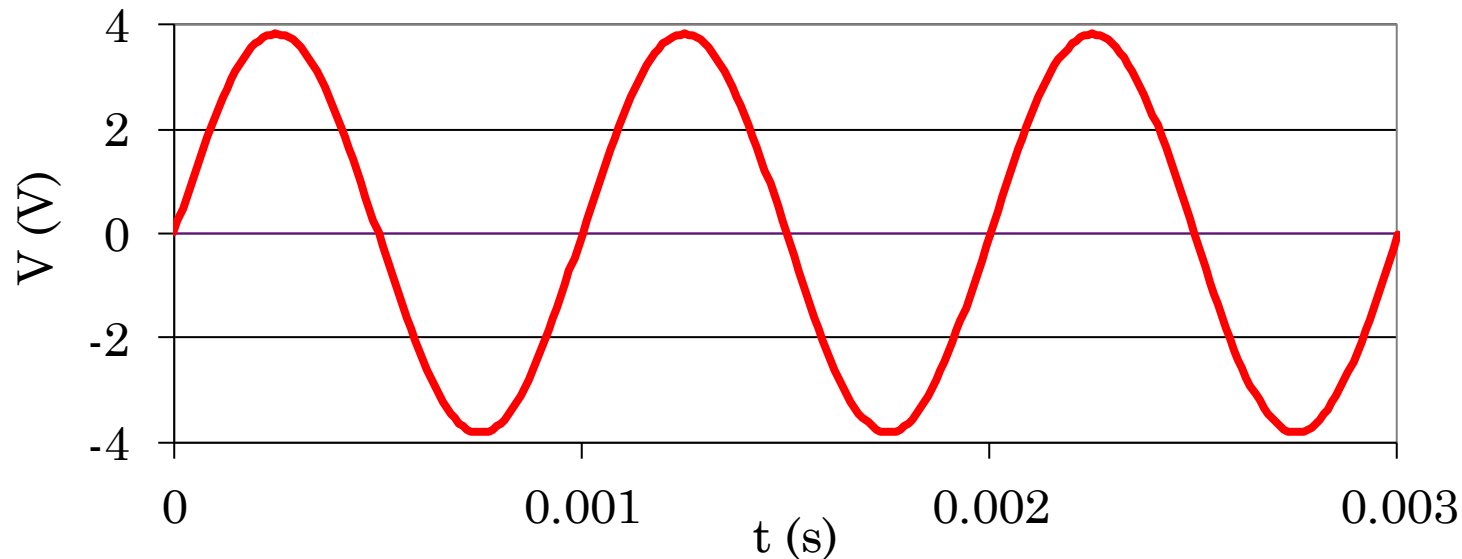
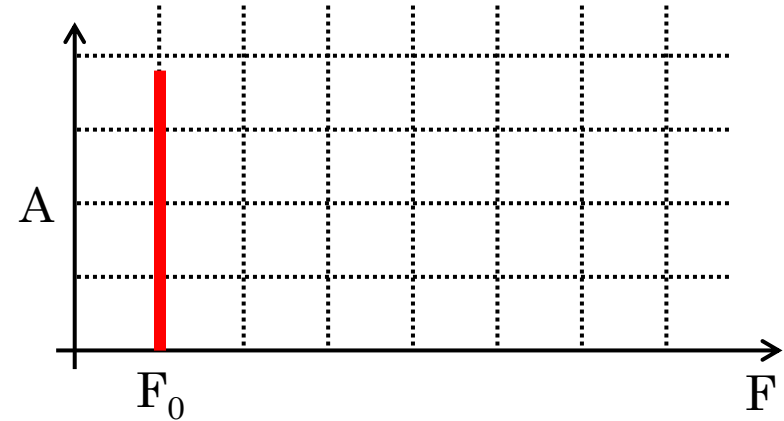
$$V(t) = \frac{4}{\pi} E_0 \left[\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega_0 t) + \frac{1}{7} \sin(7\omega_0 t) + \dots \right]$$

- ω_0 est le fondamental et $3\omega_0, 5\omega_0 \dots$ sont les harmoniques

II.5. Signal et transformée de Fourier

□ Décomposition en série de Fourier

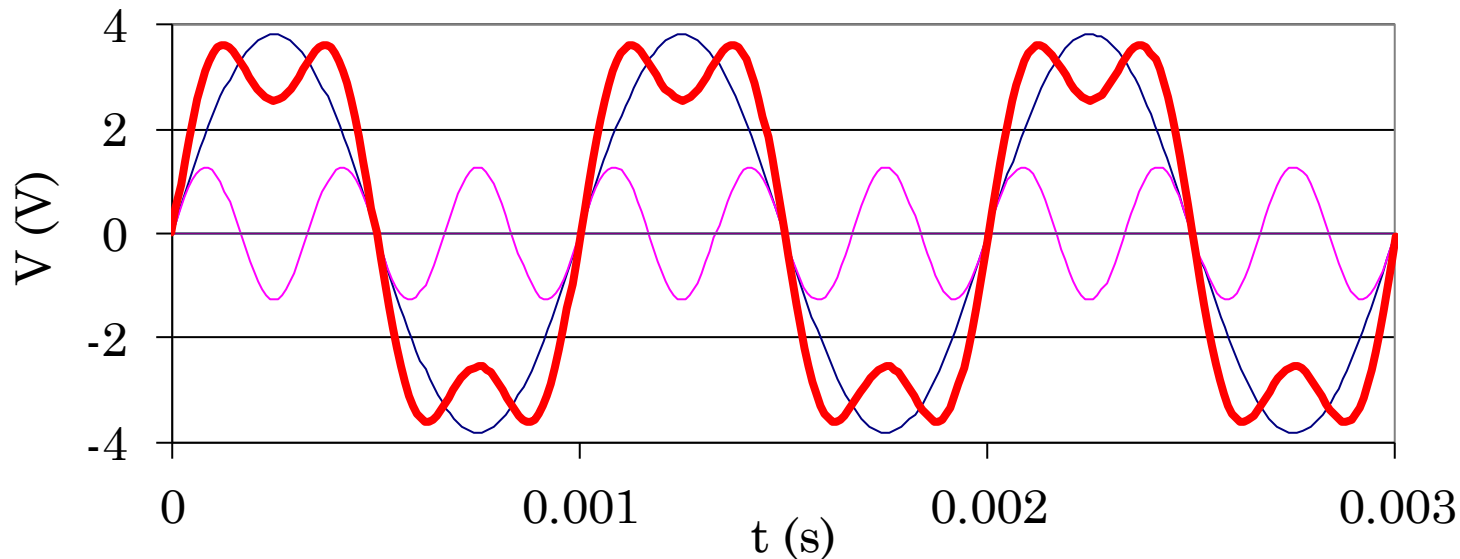
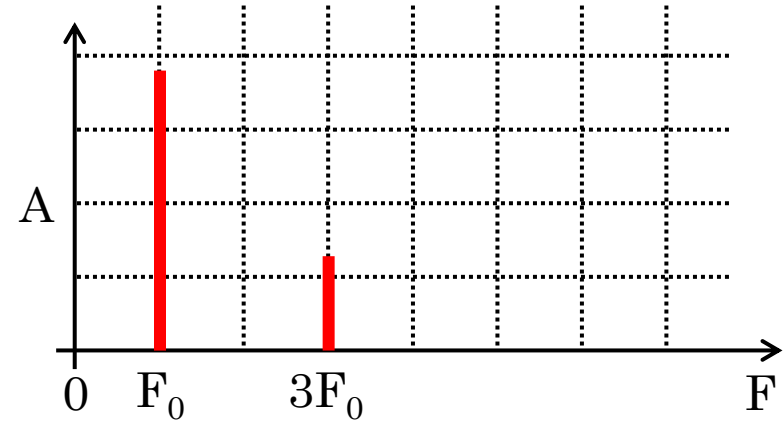
- Un signal carré se décompose en somme de sinusoides d'amplitudes et de fréquences différentes



II.5. Signal et transformée de Fourier

□ Décomposition en série de Fourier

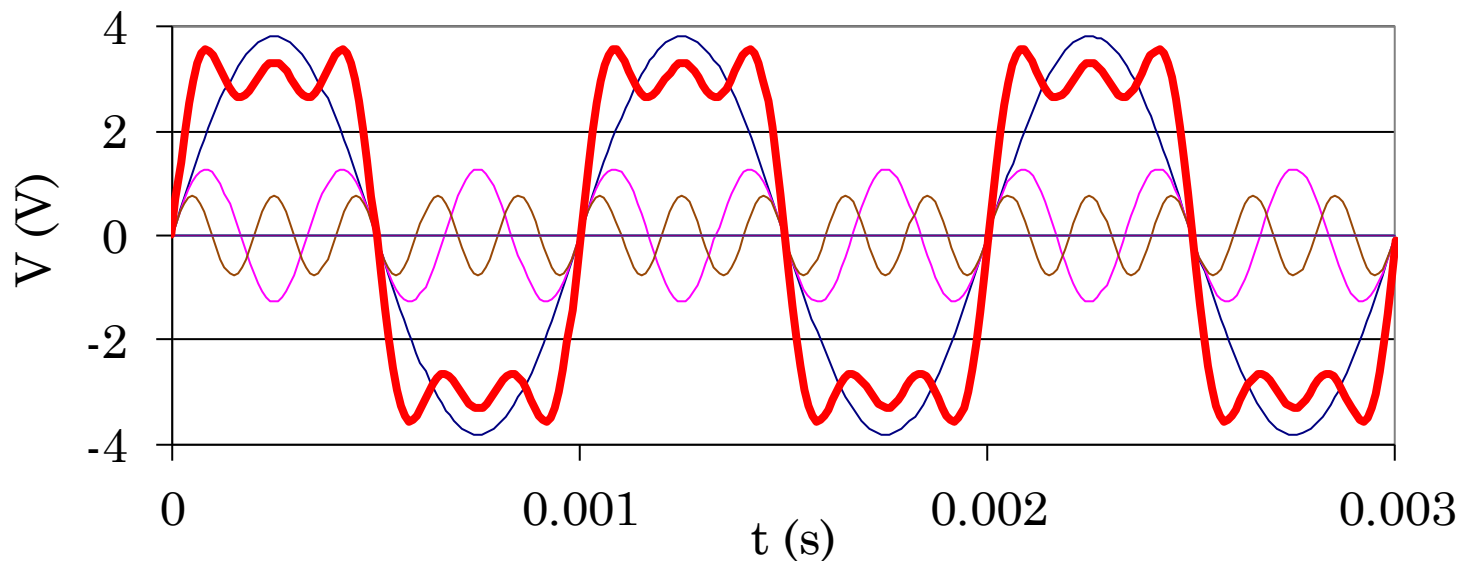
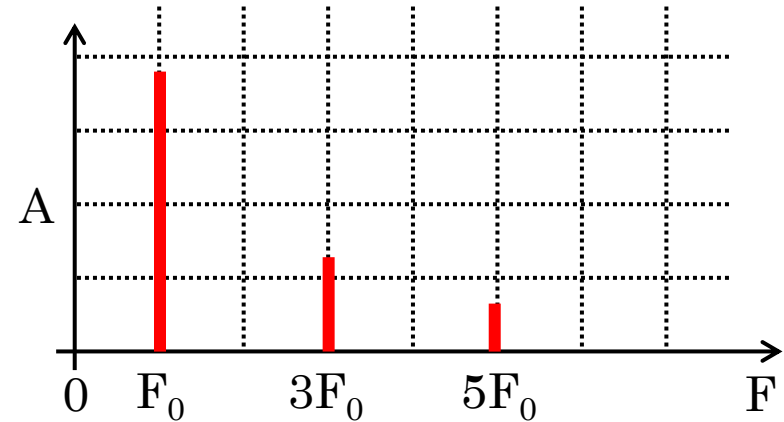
- Un signal carré se décompose en somme de sinusôides d'amplitudes et de fréquences différentes



II.5. Signal et transformée de Fourier

□ Décomposition en série de Fourier

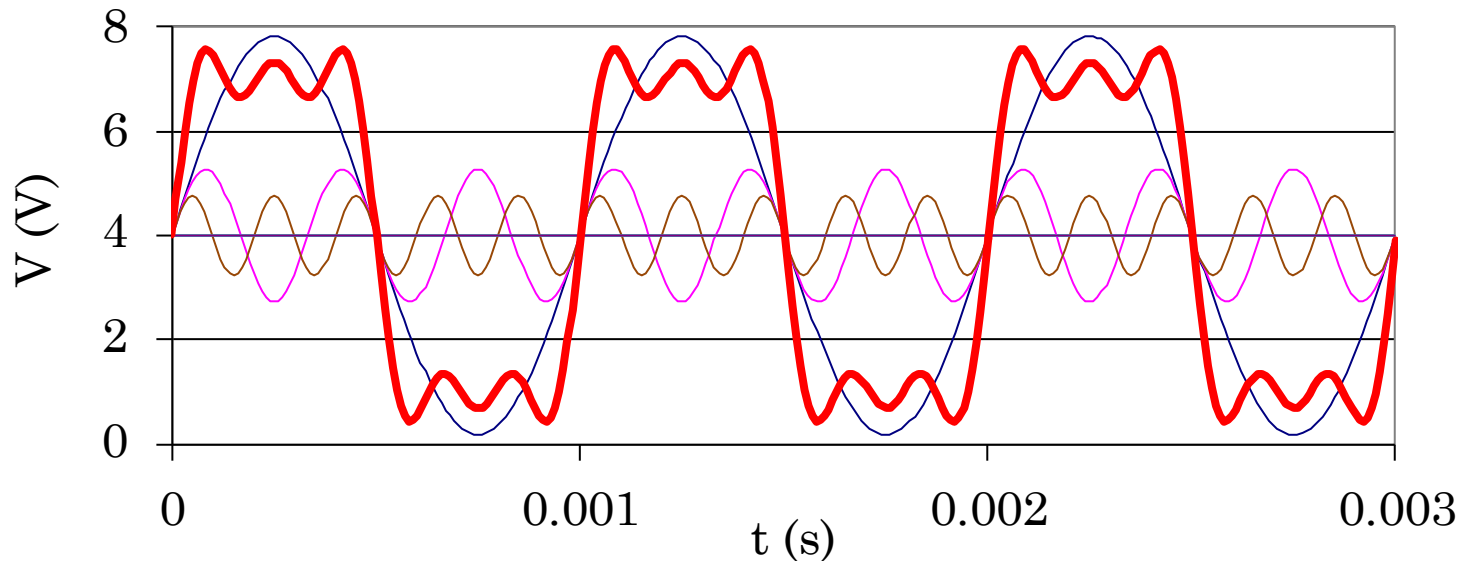
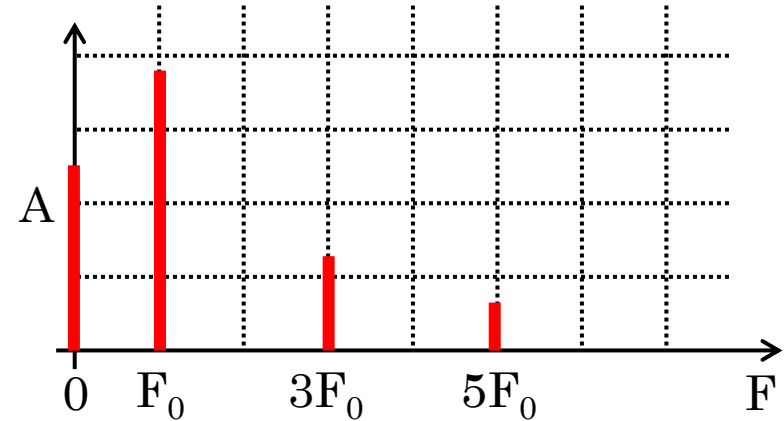
- Un signal carré se décompose en somme de sinusôides d'amplitudes et de fréquences différentes



II.5. Signal et transformée de Fourier

□ Décomposition en série de Fourier

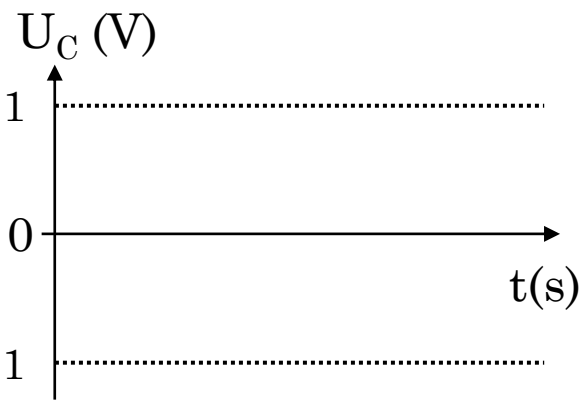
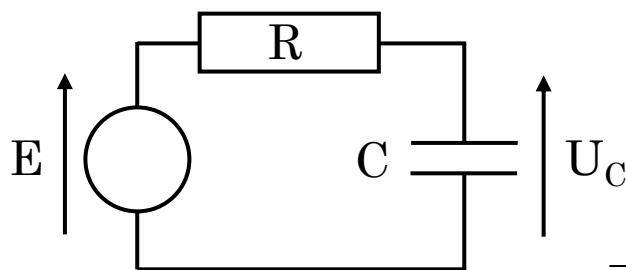
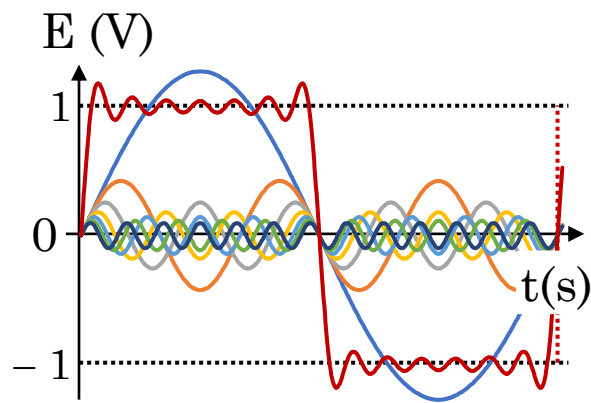
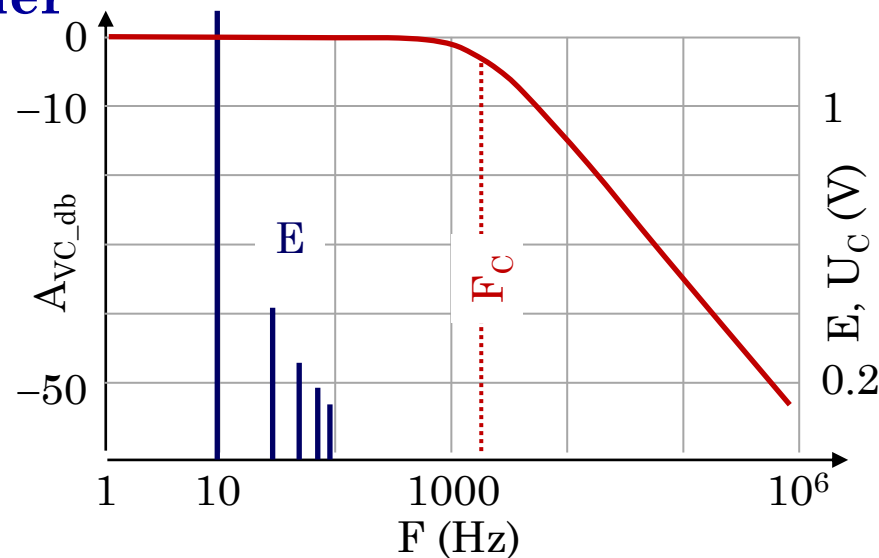
- Un signal carré se décompose en somme de sinusôides d'amplitudes et de fréquences différentes
- On peut ajouter une valeur moyenne



II.5. Signal et transformée de Fourier

□ Décomposition en série de Fourier

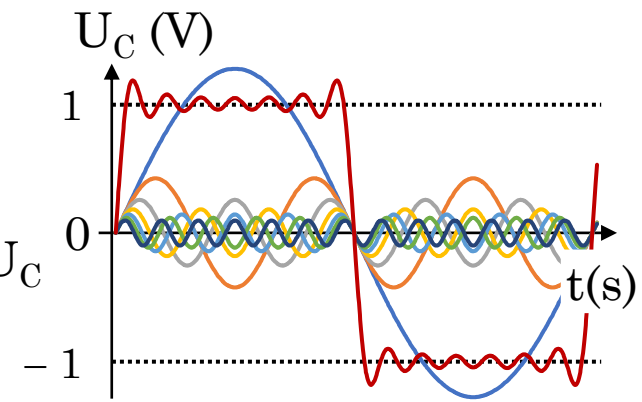
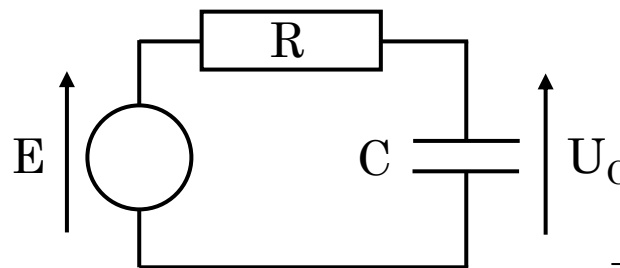
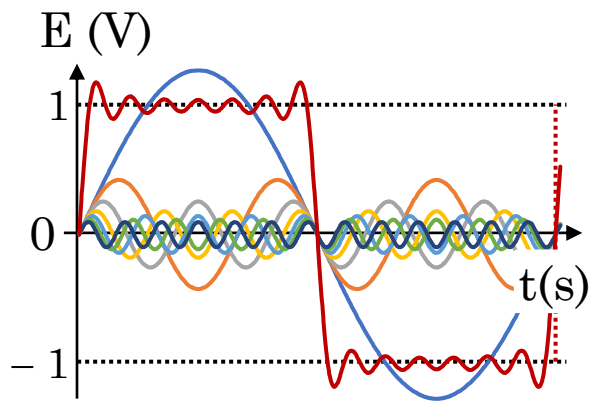
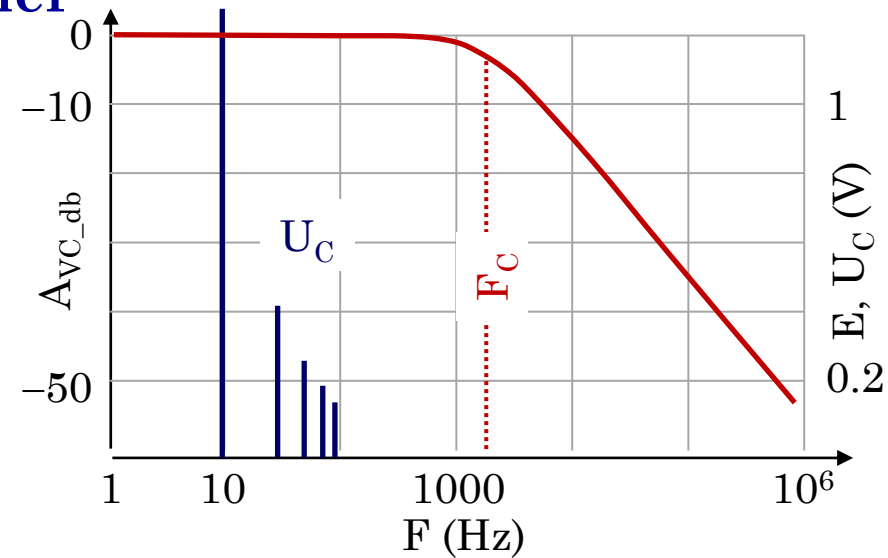
- On applique un signal carré de Fréquence 10 Hz à l'entrée du filtre



II.5. Signal et transformée de Fourier

□ Décomposition en série de Fourier

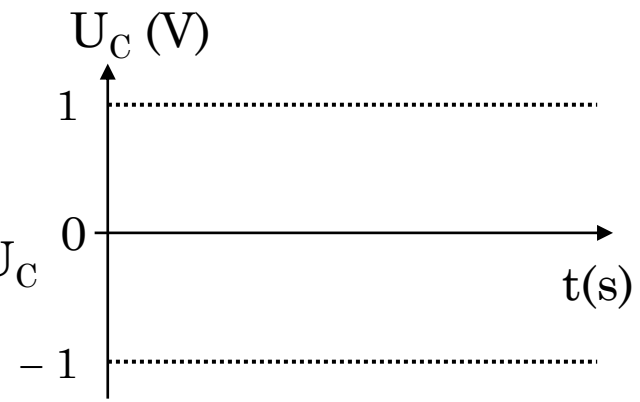
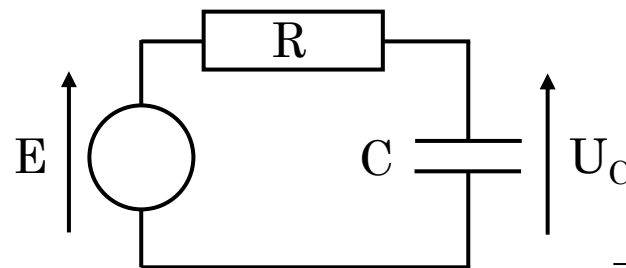
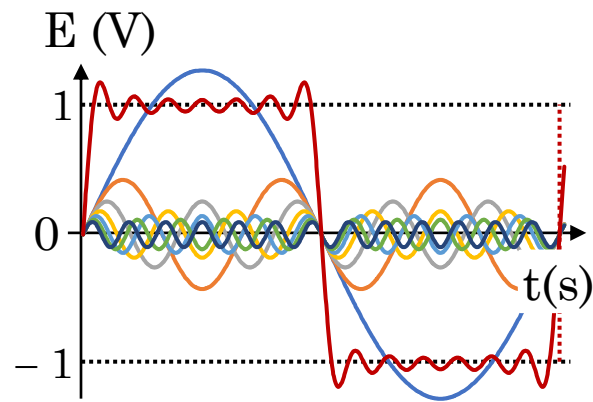
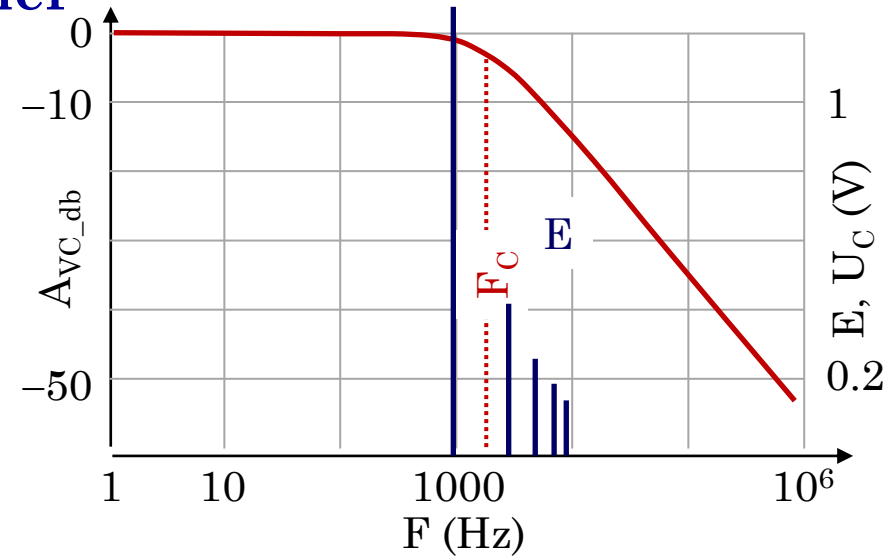
- On applique un signal carré de Fréquence 10 Hz à l'entrée du filtre
- Cette fréquence est suffisamment faible par rapport à F_C pour que le fondamental et les harmoniques ne soient pas atténués



II.5. Signal et transformée de Fourier

□ Décomposition en série de Fourier

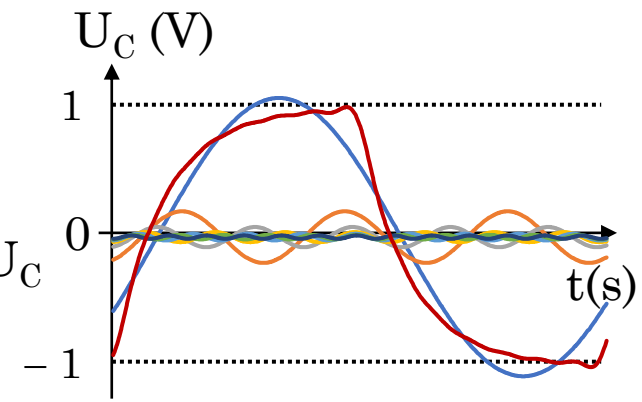
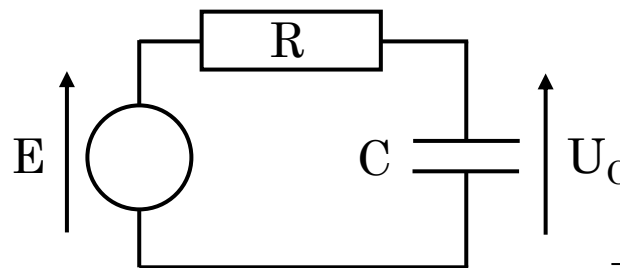
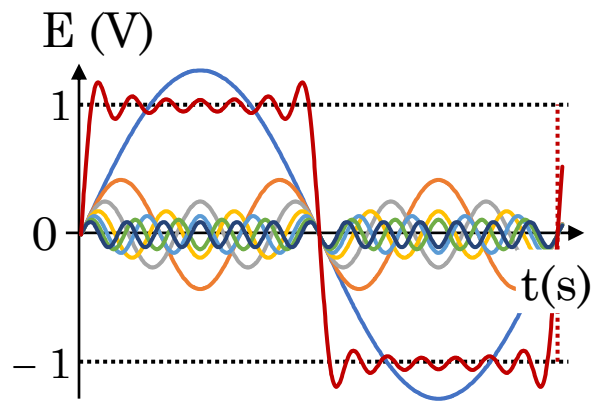
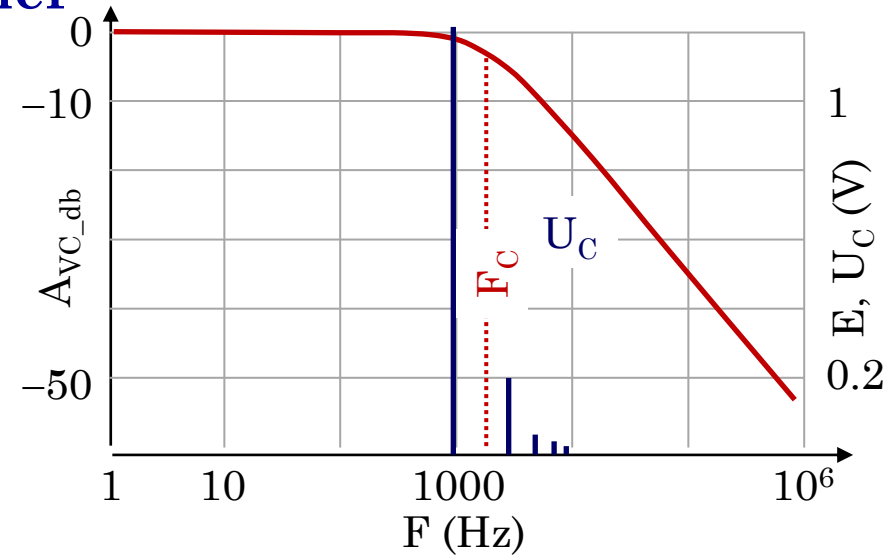
- La fréquence du signal est proche de F_C
- Il faut ajouter une valeur moyenne



II.5. Signal et transformée de Fourier

□ Décomposition en série de Fourier

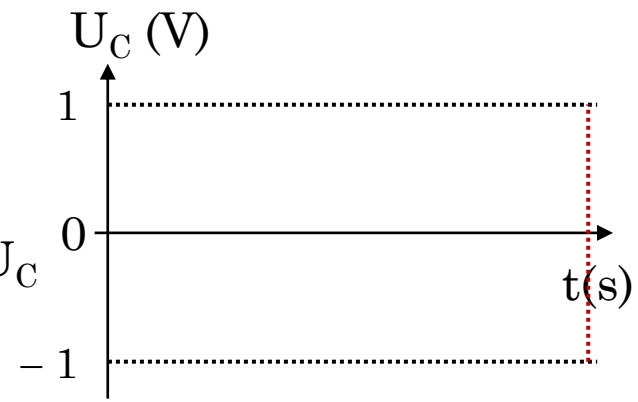
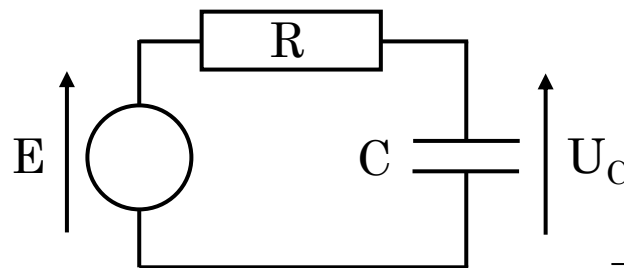
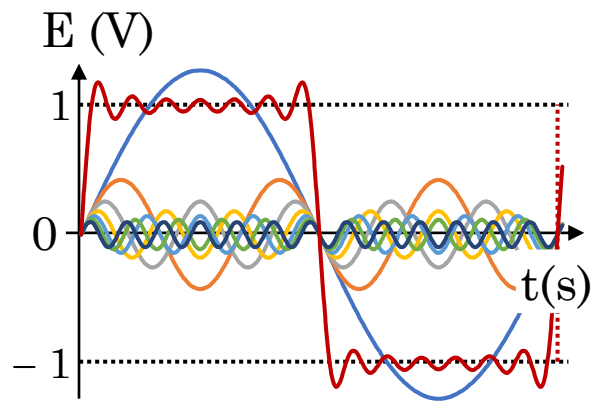
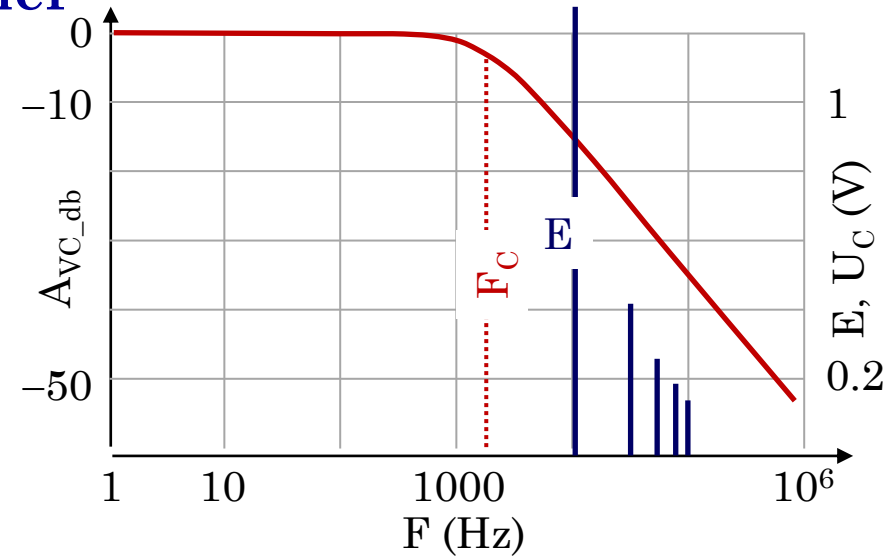
- La fréquence du signal est proche de F_C
- L'amplitude des sinusoides est plus ou moins réduite en fonction de leur fréquence
- La tension U_C a la forme d'une charge/décharge d'un condensateur avec un signal carré comme nous l'avons vu précédemment.



II.5. Signal et transformée de Fourier

□ Décomposition en série de Fourier

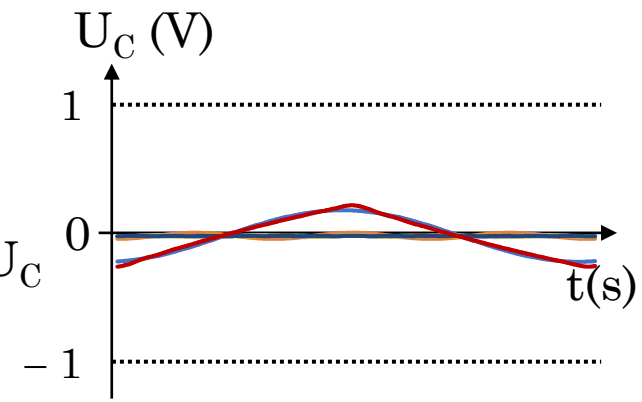
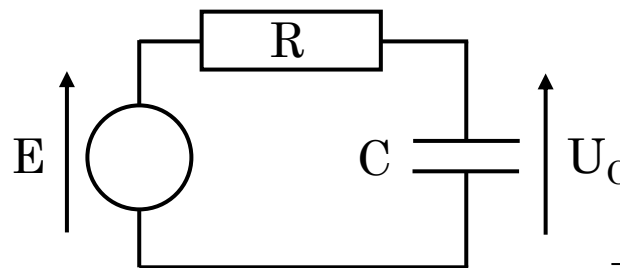
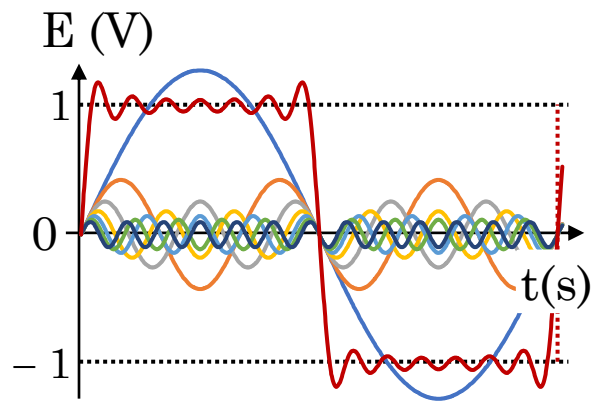
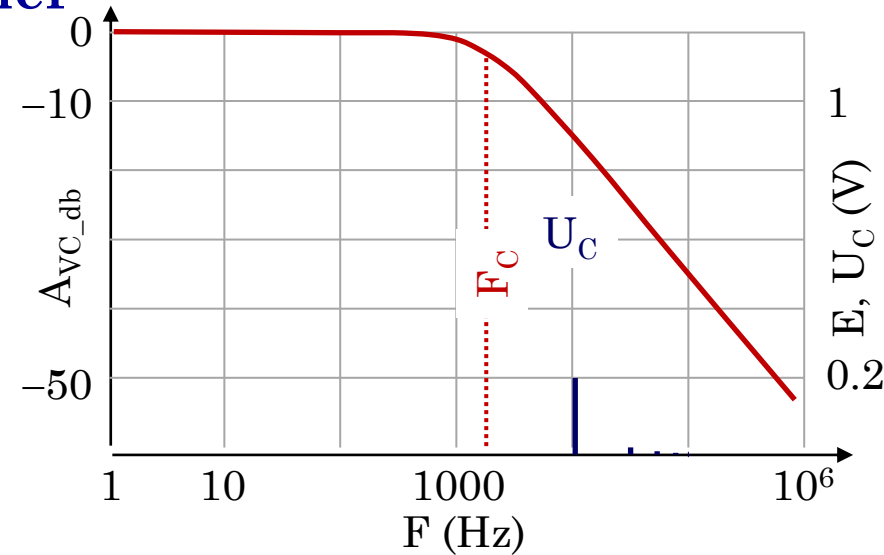
- Cette fois le signal carré est dans la coupure du filtre



II.5. Signal et transformée de Fourier

□ Décomposition en série de Fourier

- Cette fois le signal carré est dans la coupure du filtre
- Les sinusôides sont fortement atténuées et la tension U_C a la forme d'un triangle
- D'un point de vu mathématique, le filtre a réalisé l'intégration du signal carré. Dans la coupure, un filtre passe haut réalise une dérivée.



II.6. Le filtre passe haut

□ Expressions du gain et de la phase

- A partir de l'expression de $\underline{U_R}$ en fonction de $\underline{E}$, on obtient la fonction de transfert :

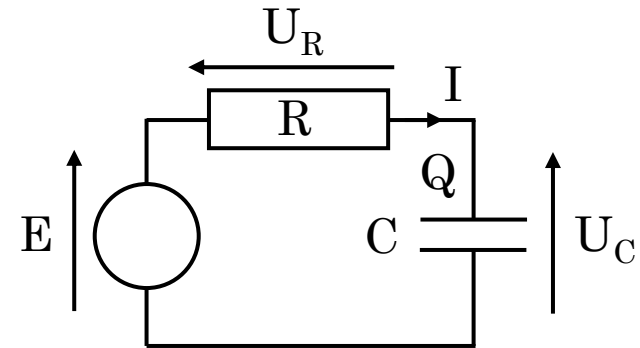
$$G_R(\omega) = \frac{\underline{U_R}}{\underline{E}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega RC}}$$

- Le gain A_{VR} s'obtient avec le module de la fonction de transfert :

$$A_{VR}(\omega) = |G_R(\omega)| = \frac{1}{\left|1 + \frac{1}{j\omega RC}\right|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega RC}\right)^2}}$$

- Au finale, nous obtenons l'expression de la tension $U_C(t)$:

$$\begin{cases} E(t) = E_0 \cdot \cos(\omega t) \\ U_R(t) = \frac{E_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega RC}\right)^2}} \cos\left(\omega t + \arctan\left(\frac{1}{\omega RC}\right)\right) \end{cases}$$



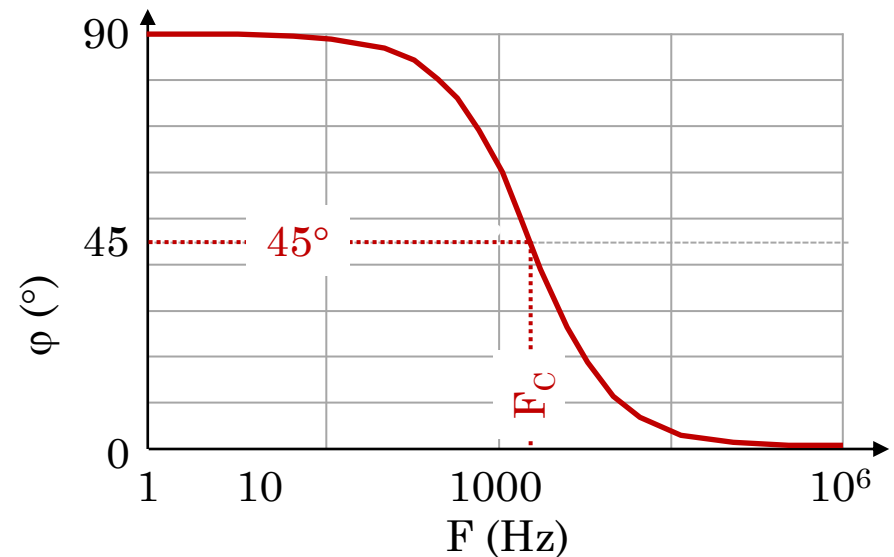
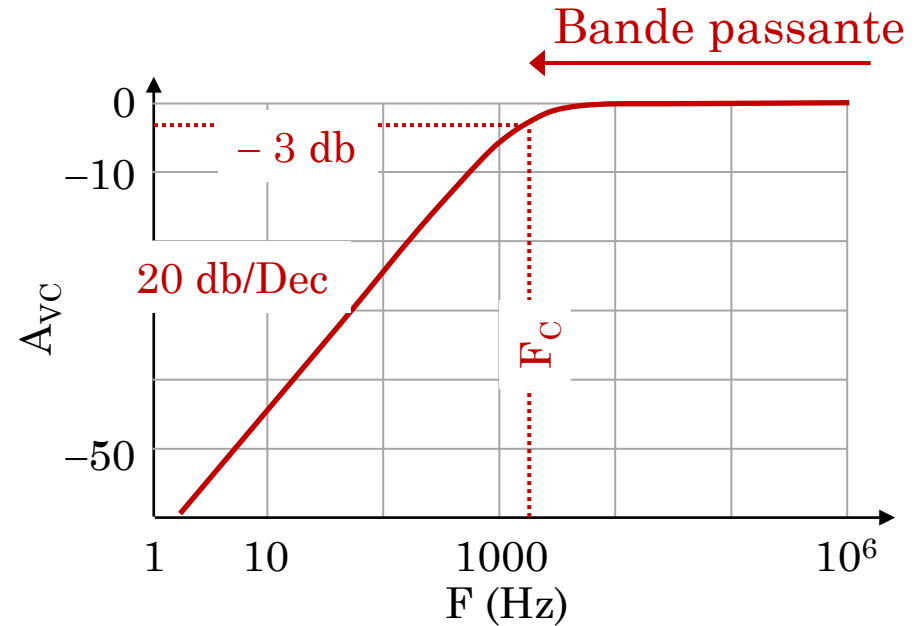
II.6. Le filtre passe haut

□ Fréquence de coupure

- La fréquence de coupure a la même expression que celle du passe bas :

$$F_C = \frac{1}{2\pi RC}$$

- La bande passante s'étend de F_C jusqu'à l'infini

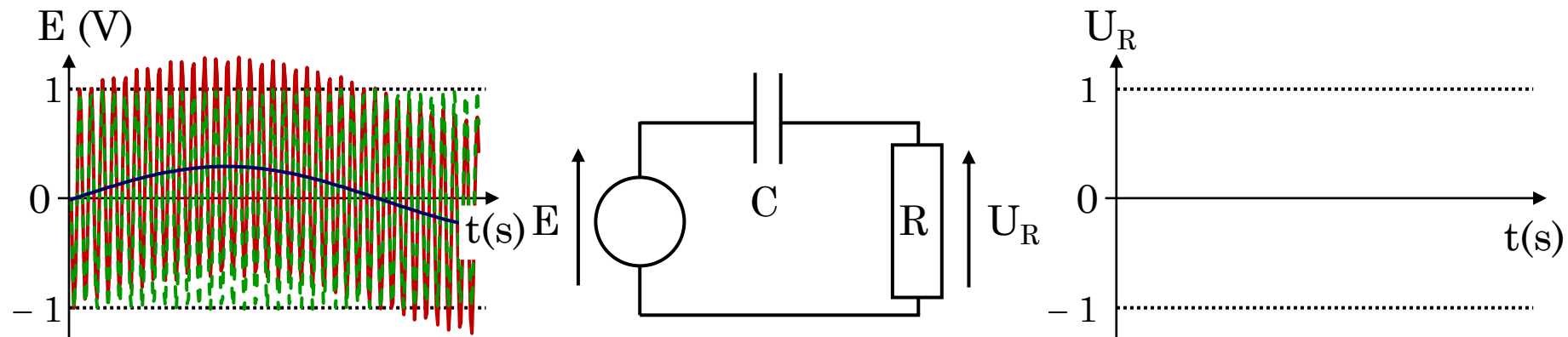
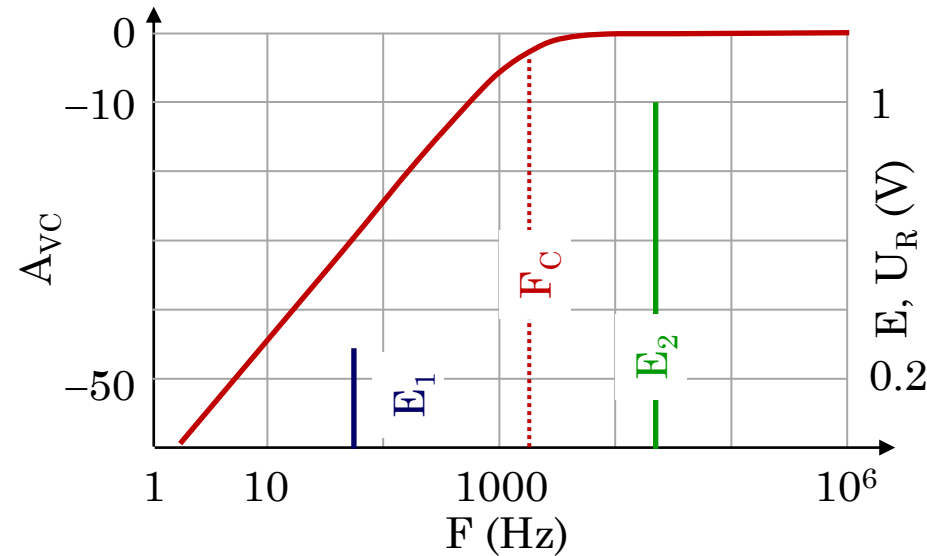


II.6. Le filtre passe haut

□ Filtrage d'un signal

■ Soit une tension sinusoïdale E_2 de fréquence 40 kHz d'amplitude 1 V sur laquelle s'est greffée une tension parasite E_1 de fréquence 100 Hz et d'amplitude 0.3 V.

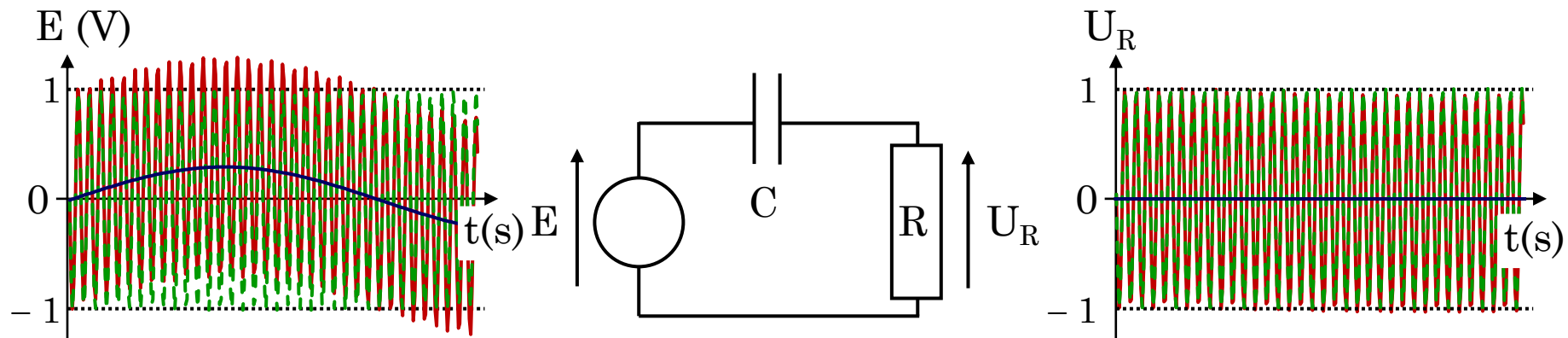
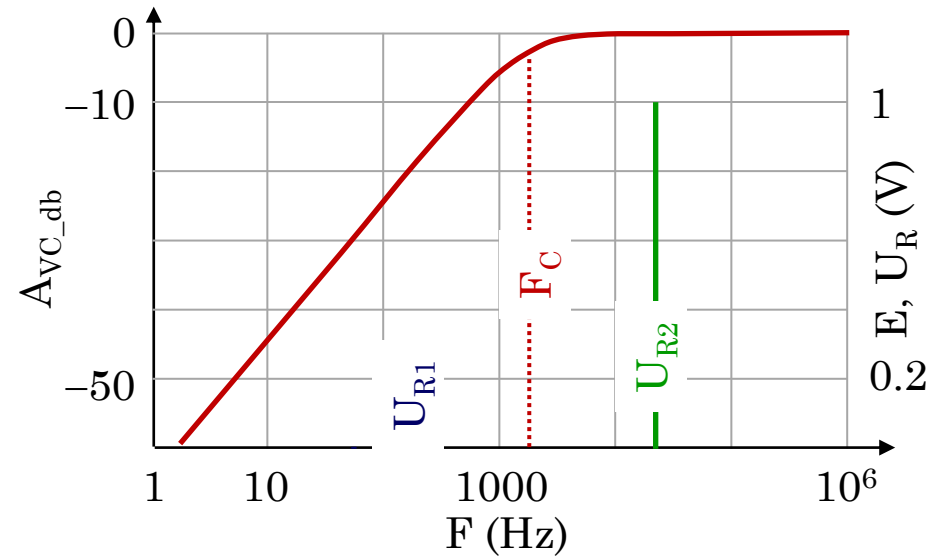
■ Le rôle de ce filtre passe haut est d'atténuer la tension E_1 : $E = E_1 + E_2 \longrightarrow U_C \approx E_2$



II.6. Le filtre passe haut

□ Filtrage d'un signal

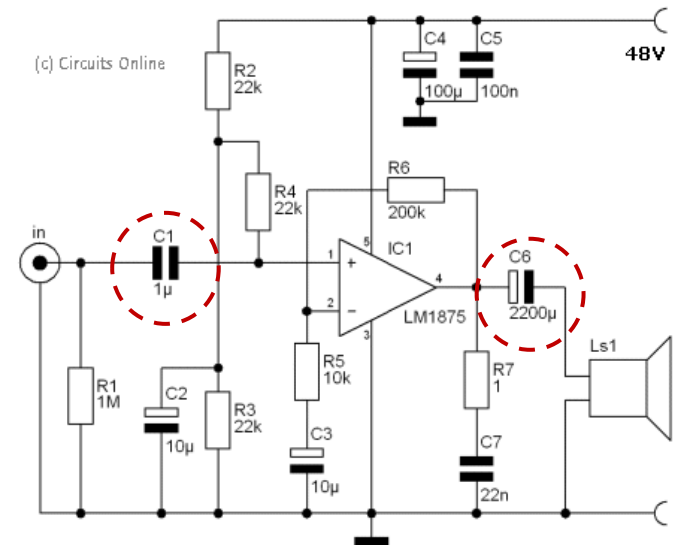
- Le signal lent (100 Hz) ne se retrouve pas en sortie du filtre



II.6. Le filtre passe haut

□ Condensateur de liaison

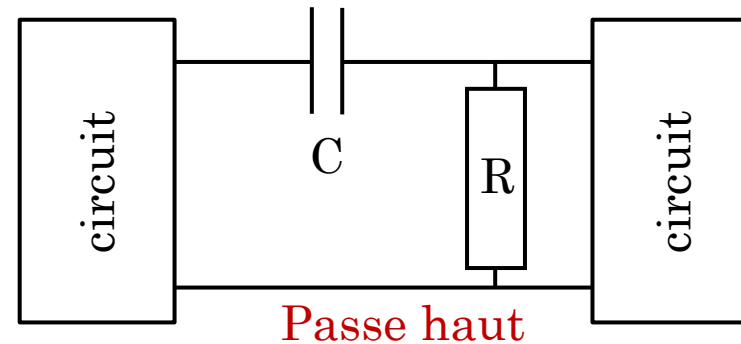
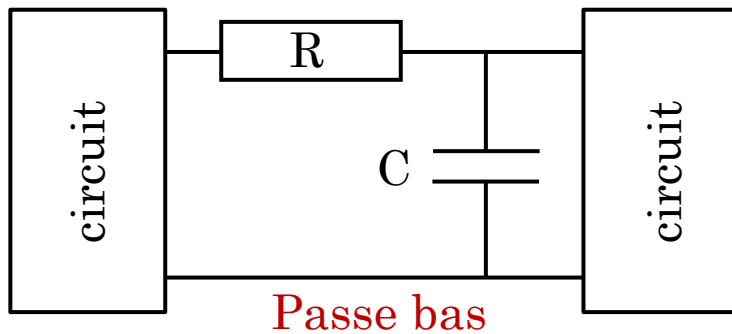
- Le condensateur du filtre passe haut est aussi appelé condensateur de liaison car il sert à faire un lien entre 2 circuits en ne laissant passer que l'alternatif.
- En supprimant la tension continue, il évite de modifier la polarisation des circuits (et aussi parfois de les griller)



II.6. Le filtre passe haut

□ En résumé

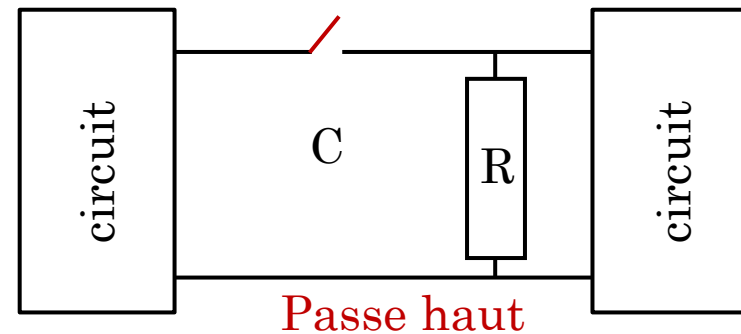
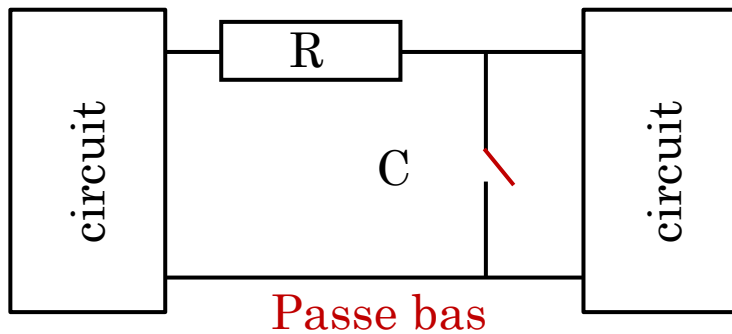
- C'est exactement le même montage que le filtre passe bas sauf que la sortie se fait sur la résistance :



II.6. Le filtre passe haut

□ En résumé

- C'est exactement le même montage que le filtre passe bas sauf que la sortie se fait sur la résistance :

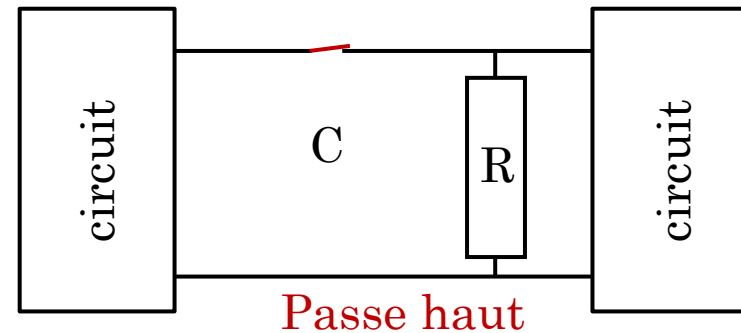
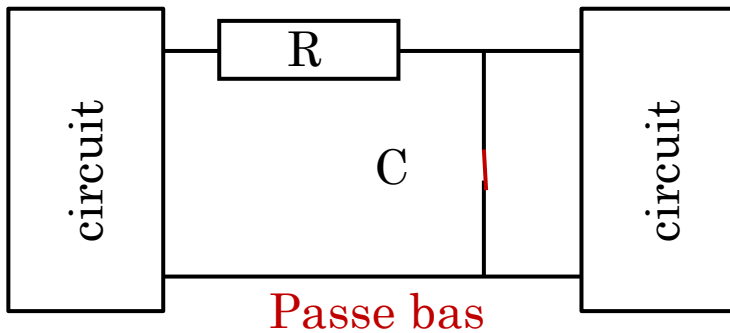


- A basse fréquence ($F \ll F_C$) un condensateur se comporte comme un circuit ouvert (donc comme si il n'était pas branché)

II.6. Le filtre passe haut

□ En résumé

- C'est exactement le même montage que le filtre passe bas sauf que la sortie se fait sur la résistance :



- A basse fréquence ($F \ll F_C$) un condensateur se comporte comme un circuit ouvert (donc comme si il n'était pas branché)
- A haute fréquence ($F \gg F_C$) un condensateur se comporte comme un circuit fermé (donc comme si c'était un court circuit)

III.1. La bobine

□ Présentation

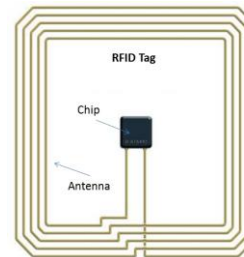
- La bobine (appelée aussi inductance, solénoïde ou encore self) est constituée d'un enroulement de fil conducteur bobiné ou non autour d'un matériaux ferromagnétique.



□ Applications

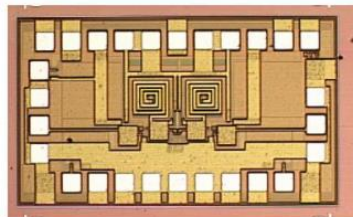


Electroaimant



Antenne

**Oscillateur
(filtrage)**



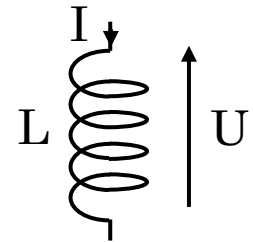
Transformateur



III.1. La bobine

□ Modélisation

- Une bobine se caractérise par la valeur de son inductance notée L (en Henry, H)
- Le courant est continu alors que la tension peut être discontinue.



- La tension et le courant sont liées par cette équation :
$$U = L \cdot \frac{dI}{dt}$$

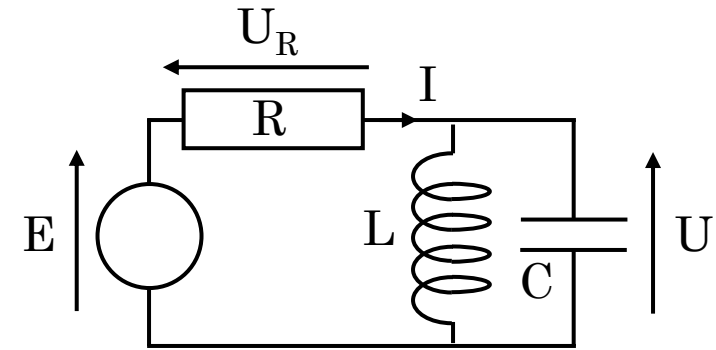
- Sachant qu'une dérivée correspond à une multiplication par $j\omega$, l'impédance complexe d'une bobine s'écrit :
$$Z_L = j\omega L$$

- Energie (en Joule, J) emmagasinée :
$$E = \frac{1}{2} L \cdot I^2$$
- Contrairement à un condensateur, l'énergie stockée dans une bobine doit s'évacuer si on coupe l'alimentation. Si on coupe brutalement le courant, la tension U va croître considérablement et provoquer un arc électrique qui grillera probablement le circuit électronique.

III.2. Le circuit bouchon

□ Le schéma

- Un circuit correspond à la mise en parallèle d'un condensateur et d'une bobine



□ Mise en équation

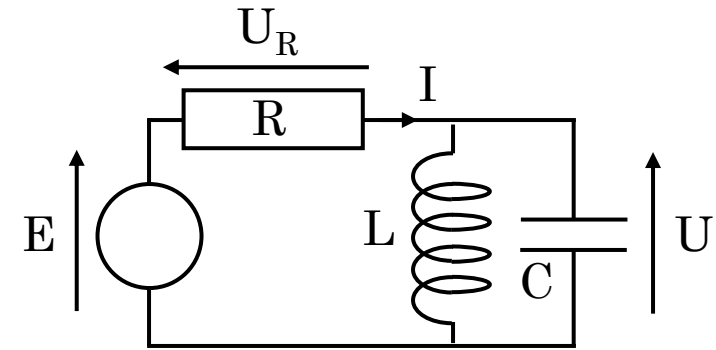
- En notation complexe, la fonction de transfert s'obtient avec un diviseur de tension :

$$G(\omega) = \frac{U}{E} = \frac{\left(\frac{1}{j\omega C} // j\omega L \right)}{R + \left(\frac{1}{j\omega C} // j\omega L \right)} = \frac{1}{R \frac{\frac{1}{j\omega C} + j\omega L}{\frac{j\omega L}{j\omega C}} + 1} = \frac{1}{R \left(\frac{1}{j\omega L} + j\omega C \right) + 1}$$

III.2. Le circuit bouchon

□ Mise en équation

- On peut ré-écrire l'expression de la fonction de transfert pour faire apparaître certains paramètres



$$G(\omega) = \frac{1}{1 + jR\sqrt{\frac{C}{L}}\left(\sqrt{LC}\omega - \frac{1}{\sqrt{LC}}\frac{1}{\omega}\right)} = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

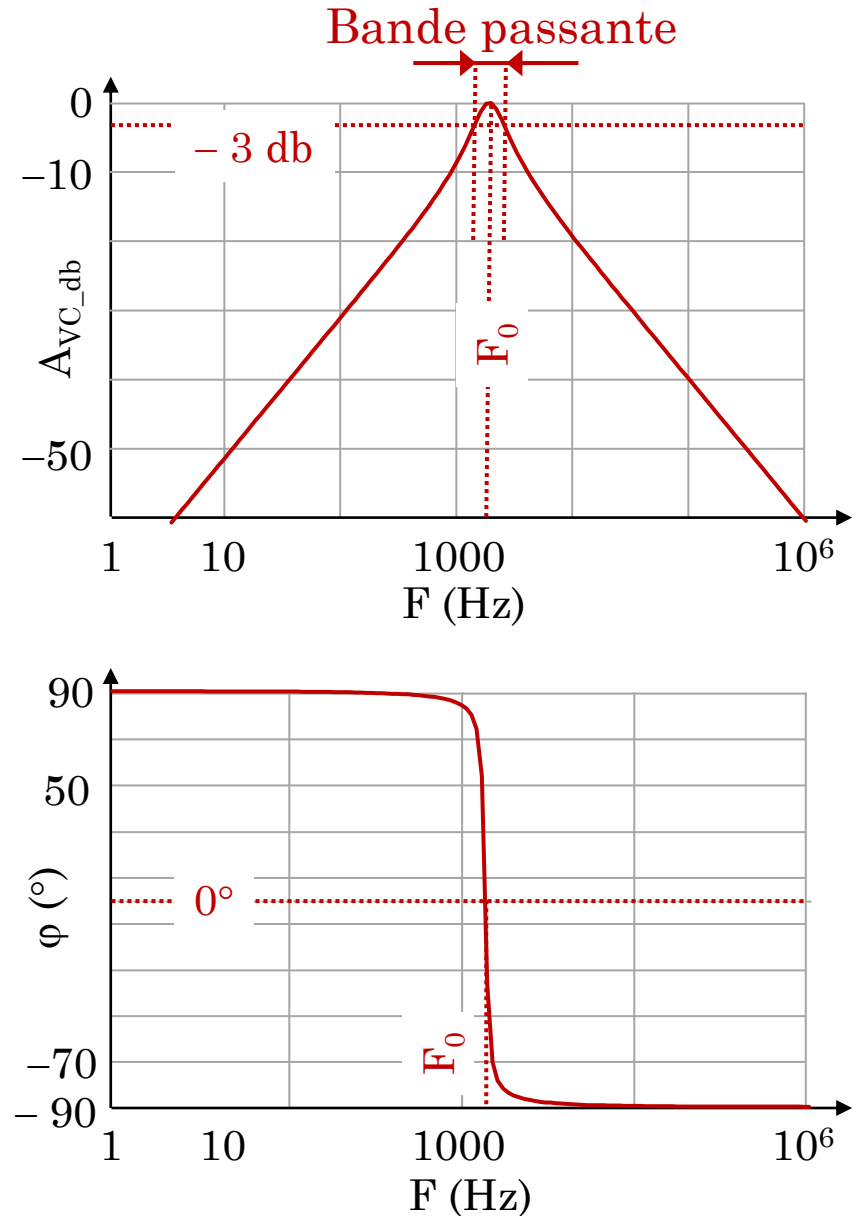
- Q s'appelle le facteur de qualité et ω_0 est la pulsation centrale du filtre
- La tension $U(t)$ a pour expression :

$$\begin{cases} E(t) = E_0 \cdot \cos(\omega t) \\ U(t) = \frac{E_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} \cos\left(\omega t - \arctan\left(Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)\right) \end{cases}$$

III.2. Le circuit bouchon

□ Courbes de gain et de phase

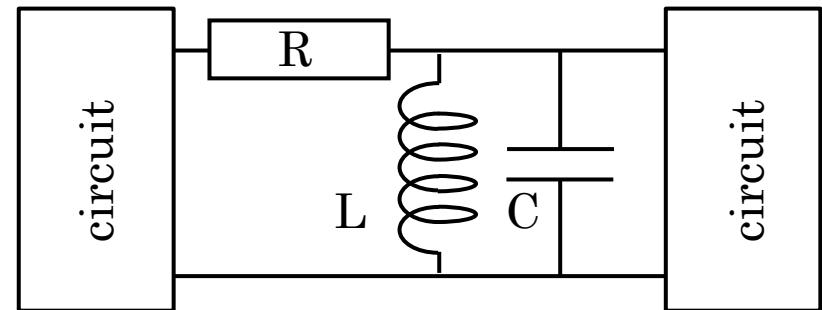
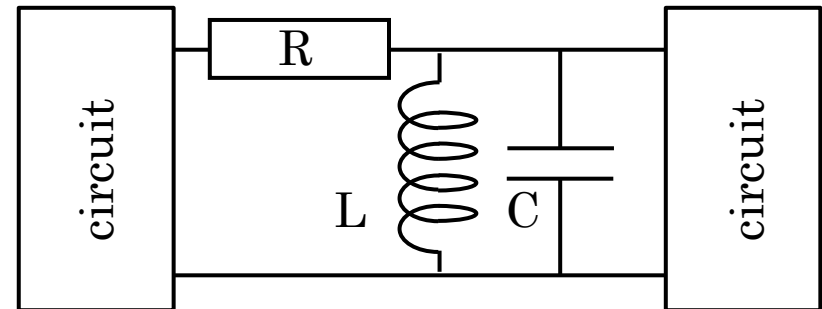
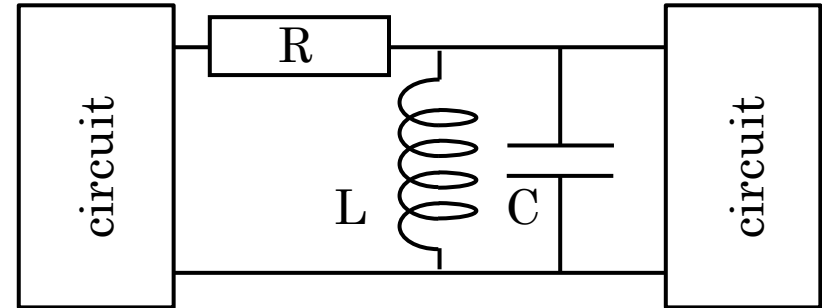
- La courbe de gain fait apparaître une bande passante très étroite qui permet de laisser passer (en première approximation) uniquement une sinusoïde de fréquence F_0
- C'est ce que l'on appelle un passe bande (ici très sélectif)
- Si on permute LC avec R, alors nous obtenons le gain complémentaire c'est un dire un filtre coupe bande. Qui dans ce cas permet de supprimer la fréquence F_0



III.2. Le circuit bouchon

■ En résumé

- A $F = F_0$, le condensateur et la bobine se comportent comme des circuits ouverts
- En basse fréquence ($F < F_0$), le condensateur se comporte comme un circuit ouvert et la bobine comme un court circuit
- En haute fréquence ($F > F_0$), le condensateur se comporte comme un court-circuit et la bobine comme un court ouvert



III.2. Le circuit bouchon

□ En résumé

- A $F = F_0$, le condensateur et la bobine se comportent comme des circuits ouverts
- En basse fréquence ($F < F_0$), le condensateur se comporte comme un circuit ouvert et la bobine comme un court circuit
- En haute fréquence ($F > F_0$), le condensateur se comporte comme un court-circuit et la bobine comme un court ouvert

