

# L'assistant à la preuve Coq, Le calcul propositionnel

Polytech Nice-Sophia  
Département informatique  
Preuves de programmes  
Sylvain Lippi

On commence par charger le paquet `Utf8` afin d'afficher correctement les différents connecteurs logiques. Ne pas oublier la majuscule en début de commande et le point à la fin :  
`Require Import Utf8.`

On déclare ensuite des variables propositionnelles :  
`Variables A B C D: Prop.`

**Exercice 1 (implique)** *Prouver les théorèmes suivants :*

$$\begin{aligned} & A \rightarrow A \\ & (A \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow A) \\ & (A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C) \\ & (A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow A \rightarrow C) \\ & (A \rightarrow B) \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow B \\ & (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C \rightarrow D) \rightarrow A \rightarrow D \\ & (((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A) \rightarrow B \rightarrow B \end{aligned}$$

**Exercice 2 (et)** *Prouver les théorèmes suivants :*

$$\begin{aligned} & A \wedge B \rightarrow B \wedge A \\ & (A \wedge B) \wedge C \rightarrow A \wedge (B \wedge C) \\ & A \wedge (A \rightarrow B) \rightarrow B \\ & (A \wedge B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \rightarrow C) \\ & (A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow (A \wedge B \rightarrow C) \\ & (A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge A \wedge C \rightarrow B \wedge D \end{aligned}$$

**Exercice 3 (ou)** *Prouver les théorèmes suivants :*

$$\begin{aligned} & A \vee B \rightarrow B \vee A \\ & (A \vee B) \vee C \rightarrow A \vee (B \vee C) \\ & (A \vee B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \end{aligned}$$

**Exercice 4 (non)** *Prouver les théorèmes suivants :*

$$\begin{aligned} & \neg(A \wedge \neg A) \\ & \neg\neg(A \vee \neg A) \\ & (A \vee B) \wedge \neg A \rightarrow B \\ & A \rightarrow \neg A \rightarrow B \end{aligned}$$

**Exercice 5 (J > K)** *Prouver les théorèmes suivants :*

$$(B \vee \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$$

$$A \rightarrow \neg\neg A$$

$$(A \rightarrow B) \rightarrow \neg B \rightarrow \neg A$$

$$(\neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg(A \wedge B)$$

$$A \wedge \neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B)$$

**Exercice 6 (Equivalences)** *Réécrire les théorèmes suivants sans le connecteur  $\leftrightarrow$  et en faire la preuve.*

$$\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$

$$\neg A \leftrightarrow \neg\neg\neg A$$