Deux fonctions équivalentes

Polytech Nice-Sophia
Département informatique
Preuves de programmes
Sylvain Lippi

1 Premiers éléments

On considère un ensemble contenant deux couleurs (noir et blanc) et les listes de couleurs :

```
Require Import Utf8.
Require Import List.
Inductive color : Set := black : color | white : color.
Definition listc := (list color).
```

Exercice 1 *Utiliser le théorème* `eq_ind` *pour prouver que les deux couleurs sont dictinctes.*

`Lemma` *not_black_n_white :* ¬ *(white=black).*

Indication. *On définira la fonction* `iswhite` *avec l'opérateur* `match` *qui rend* `True` *si la couleur est blanche et* `False` *sinon.*

Exercice 2 *Définir, en utilisant* `match`*, la fonction* `invert` *qui prend une couleur et l'inverse. Puis, prouver les lemmes suivants :*

`Lemma` *simple_invert :* ∀ *c : color,* ¬*(invert c = c).*

`Lemma` *double_invert :* ∀ *c : color, invert (invert c) = c.*

2 La fonction coffeecan

Exercice 3 (la fonction coffeecan) *Ecrire une fonction* `coffeecan` *qui prend une liste non vide de couleurs en argument et opère comme suit jusqu'à ce qu'il ne reste qu'un seul élément.*

On enlève les deux premiers éléments et on les compare : s'ils sont égaux on ajoute à la liste (par exemple au début) un élément noir sinon on ajoute un élément blanc.

Lorsqu'il ne reste plus qu'un élément, la fonction renvoie cet élément.

Indication. Pour simplifier la définition, on pourra définir une fonction prenant deux arguments : une couleur c (le premier élément) et une liste ℓ (le reste de la liste) éventuellement vide.

Exercice 4 (coffeecan-invert) *Montrer que pour toute liste ℓ et toute couleur c,*

$$(\mathit{coffeecan}\ (\texttt{invert}\ c)\ \ell) = \texttt{invert}\ (\mathit{coffeecan}\ c\ \ell)$$

3 La fonction parity

Définir une fonction `parity` prenant une liste de couleurs et qui renvoie noir lorsqu'elle contient un nombre pair de blancs et blanc sinon.

Exercice 5 (Le théorème) *Montrer que pour toute liste non vide, les fonctions* `coffeecan` *et* `parity` *sont équivalentes.*