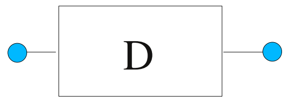
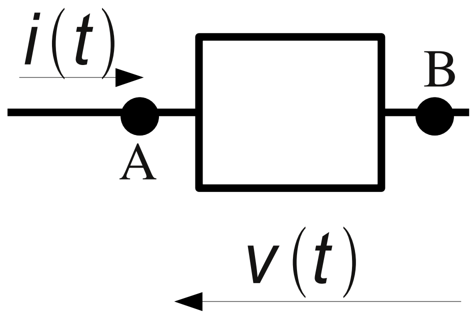
DIPÔLES



Les dipôles sont des composants ne comportant que deux bornes. Ils possèdent une caractéristique courant-tension spécifique.

<u>I – Conventions de signes</u>

I.1 – Introduction



i(t) : courant circulant dans le dipôle

v(t) : tension aux bornes du dipôle

Pour : - $i(t) > 0$, le sens réel du courant correspond à celui de la flèche,

- $i(t) < 0$, le sens réel du courant est opposé à celui de la flèche.

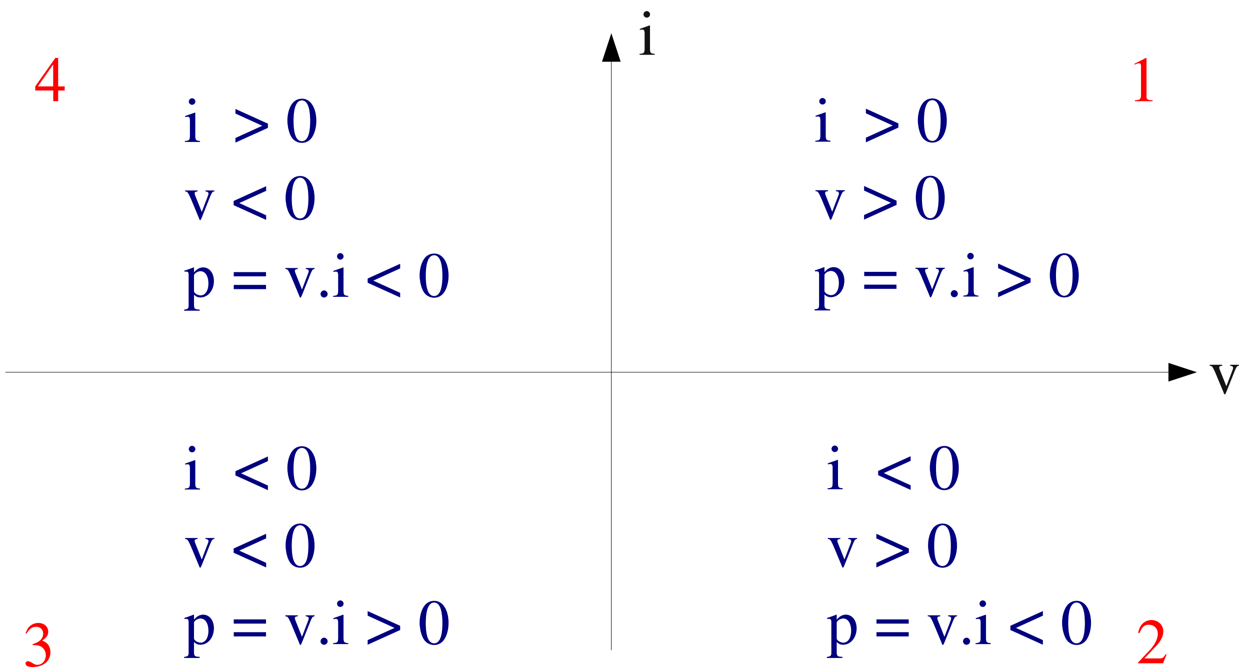
Pour : - $v(t) > 0$, $V_A > V_B$,

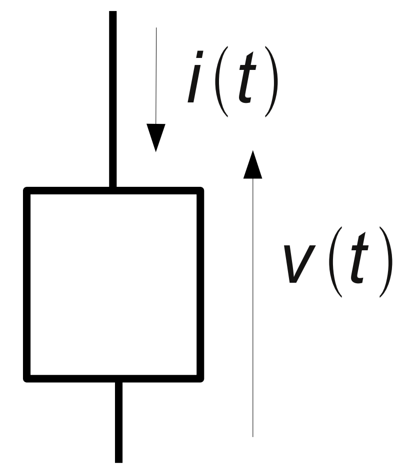
- $v(t) < 0$, $V_A < V_B$.

DIPÔLES

I.2 – Convention récepteur

Le courant entre par la borne de potentiel le plus élevé (sens des flèches).

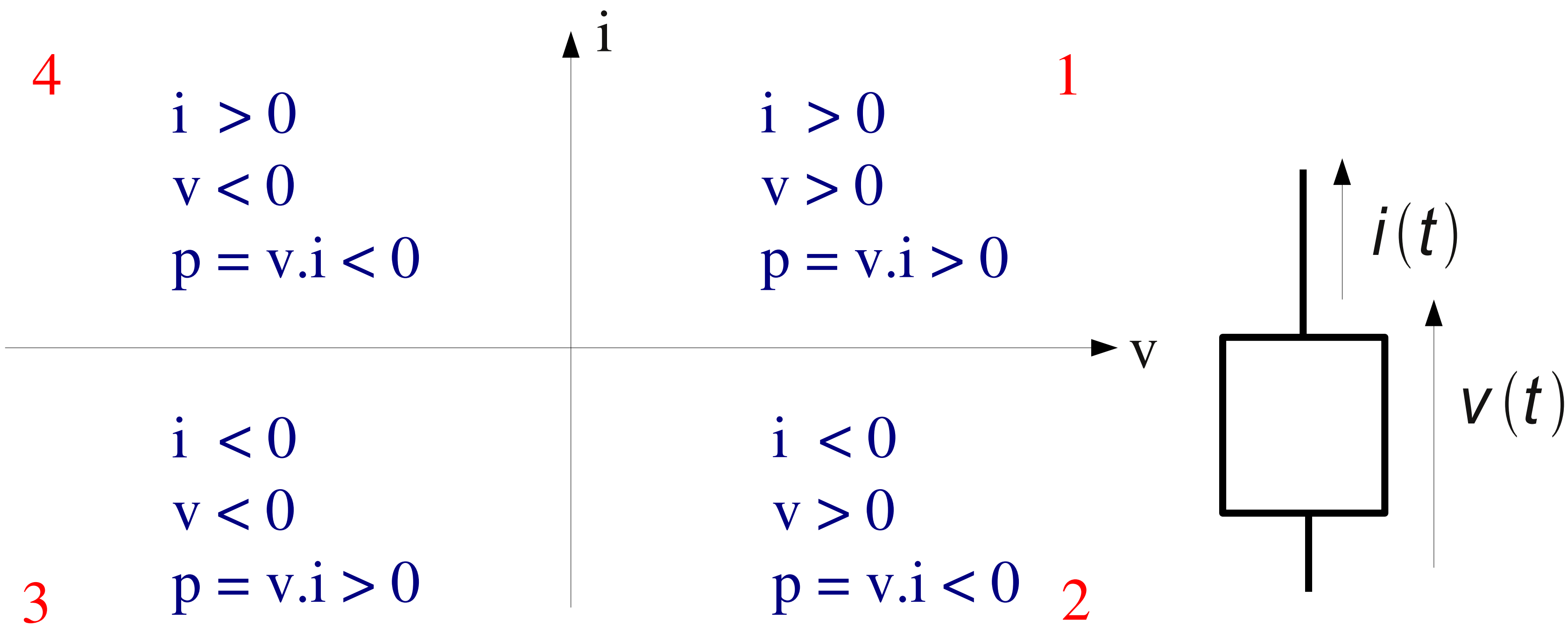




- Cadran 1 et 3 : fonctionnement récepteur (absorbe de l'énergie).
- Cadran 2 et 4 : fonctionnement générateur (fournit de l'énergie).

I.3 – Convention générateur

Le courant sort par la borne de potentiel le plus élevé (sens des flèches).



- Cadran 1 et 3 : fonctionnement générateur (fournit de l'énergie).
- Cadran 2 et 4 : fonctionnement récepteur (absorbe de l'énergie).

D

II – Caractéristiques des dipôles de base

II.1 – Introduction

Les dipôles sont décrits par leur **caractéristique** courant - tension.

C'est le **modèle** du composant.

Lorsque cette caractéristique peut être représentée par une droite, le modèle est **linéaire.**

Expression des caractéristiques linéaires :

$$\left[v(t)+\textit{dérivées partielles}\right]=f\left[i(t)+\textit{dérivées partielles}\right]$$

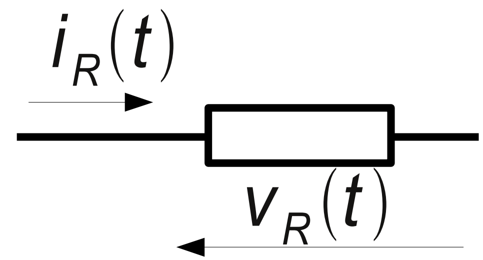
$$\left[i(t)+\textit{dérivées partielles}\right]=g\left[v(t)+\textit{dérivées partielles}\right]$$

Les coefficients des relations étant constant.

II.2 – Dipôles passifs

Déf : un dipôle est passif s'il ne comporte pas de sources de tension ou de sources de courant.

1) La résistance



- linéaire : loi d'ohm

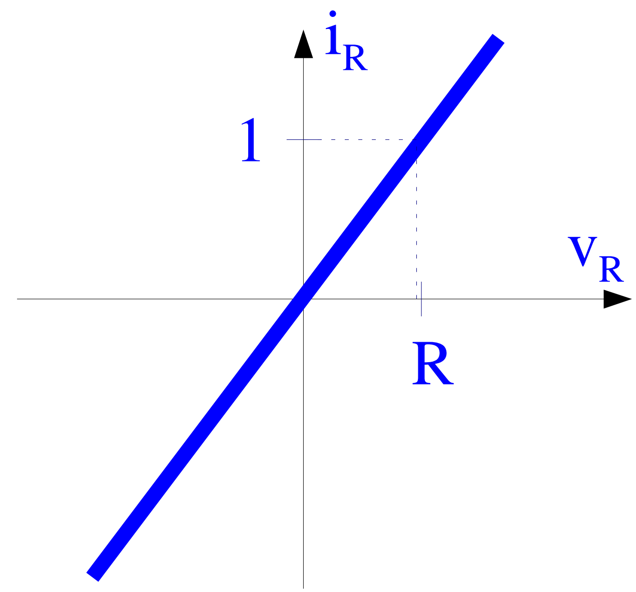
$$v_R(t)=R\cdot i_R(t)$$

- élément statique
- caractéristique symétrique / origine

  $\Rightarrow$ non polarisé

- la résistance R s'exprime en ohms (Ω)
- l'admittance G s'exprime en Siemens (S)

$$G=\frac{1}{R}$$



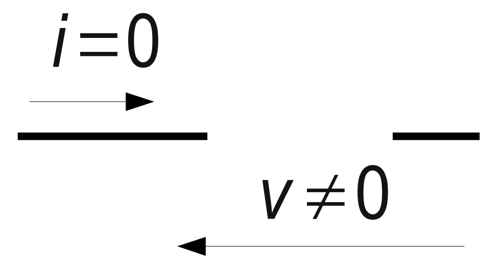
DIPÔLES

2) Le circuit ouvert ou fermé : interrupteur idéal

Pour une résistance linéaire R :

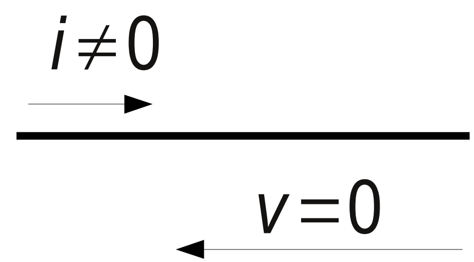
- si $R \to \infty$, $i \to 0$

  modèle du circuit ouvert



- si $R \to 0$, $v \to 0$

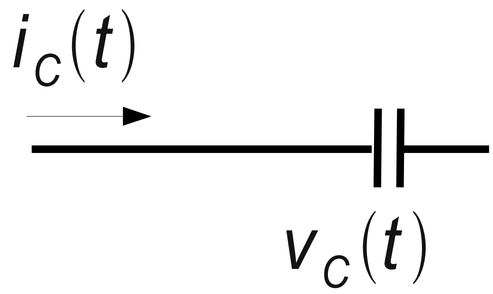
  modèle du court-circuit



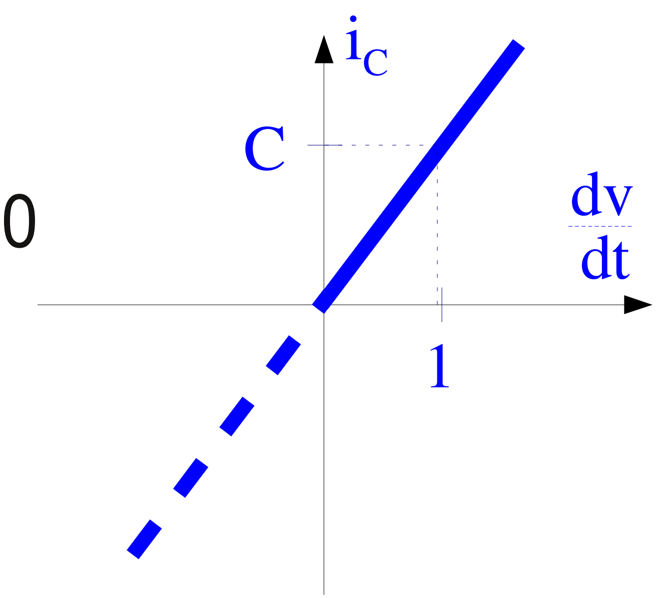
Un interrupteur idéal est un dispositif qui est modélisé par un circuit ouvert ou fermé actionné par une cause externe (mécanique, température, pression, ...).

DIPÔLES

3) Le condensateur



- Electrostatique : **q(t) = C . $\mathbf{v_C}$(t)**
- La capacité C s'exprime en Farads (F)
- $i_C(t) = \dfrac{dq(t)}{dt} = C \cdot \dfrac{d\,v_C(t)}{dt}$
- $v_C(t) = cte \rightarrow \dfrac{d\,v_c(t)}{dt} = 0 \rightarrow i_C(t) = 0$
- Composant dynamique



Tension aux bornes du condensateur :

$$v_C(t) = v_C(t_0) + \frac{1}{C}\int i_C(t)\,dt$$

Une discontinuité de tension impose mathématiquement une intensité infinie (physiquement impossible).

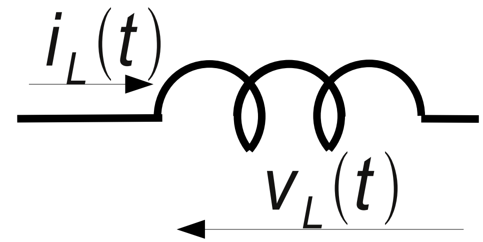
La tension aux bornes d'un condensateur est une fonction continue du temps.

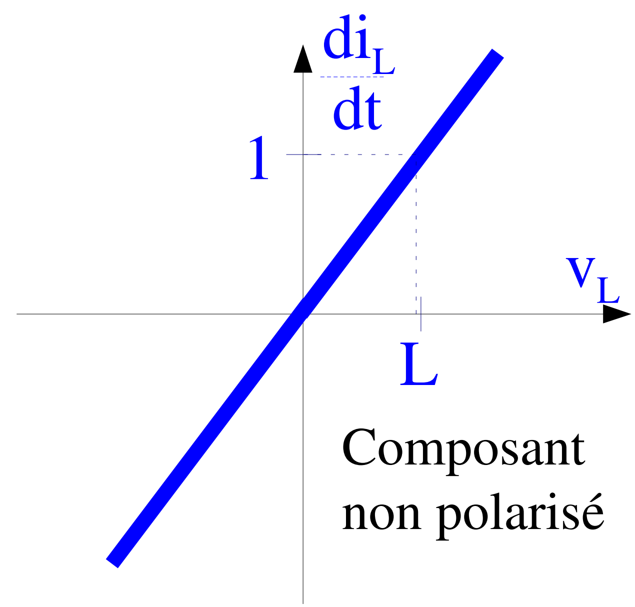
Le condensateur **« s'oppose »** aux variations de tension.

DIPÔLES

4) L'inductance

- Magnétostatique : **$\Phi(t) = L \cdot i_L(t)$**
- L'inductance L s'exprime en Henry (H)
- $v_L(t) = \dfrac{d\Phi(t)}{dt} = L \cdot \dfrac{di_L(t)}{dt}$
- $i_L(t) = cte \rightarrow \dfrac{di_L(t)}{dt} = 0 \rightarrow v_L(t) = 0$
- Composant dynamique





Composant non polarisé

Courant dans l'inductance :

$$i_L(t) = i_L(t_0) + \frac{1}{L}\int v_L(t)\,dt$$

Une discontinuité de courant impose mathématiquement une tension infinie (physiquement impossible).

Le courant dans une inductance est une fonction continue du temps.

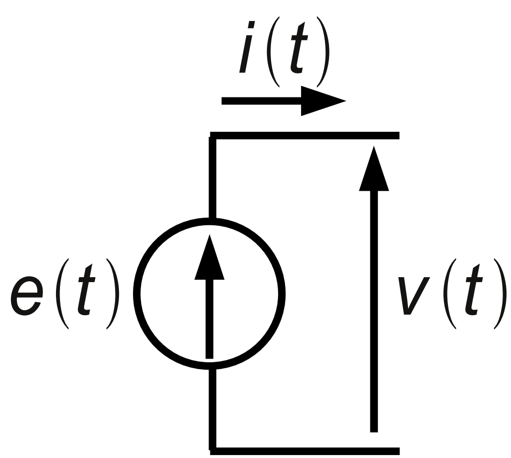
L'inductance « **s'oppose** » aux variations de courant.

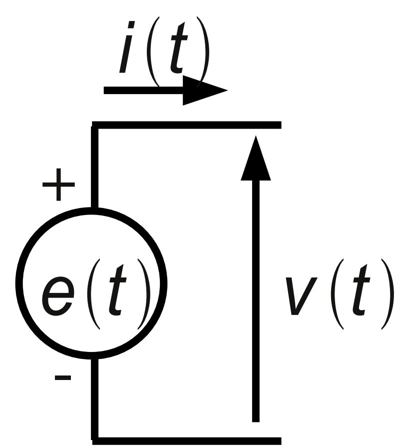
II.3 – Dipôles actifs

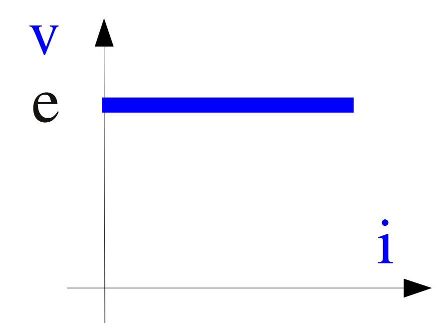
1) La source de tension

Un générateur de tension est caractérisé par une force électromotrice exprimée en volts qui représente la ddp entre ses bornes en circuit ouvert.

- source de tension idéale



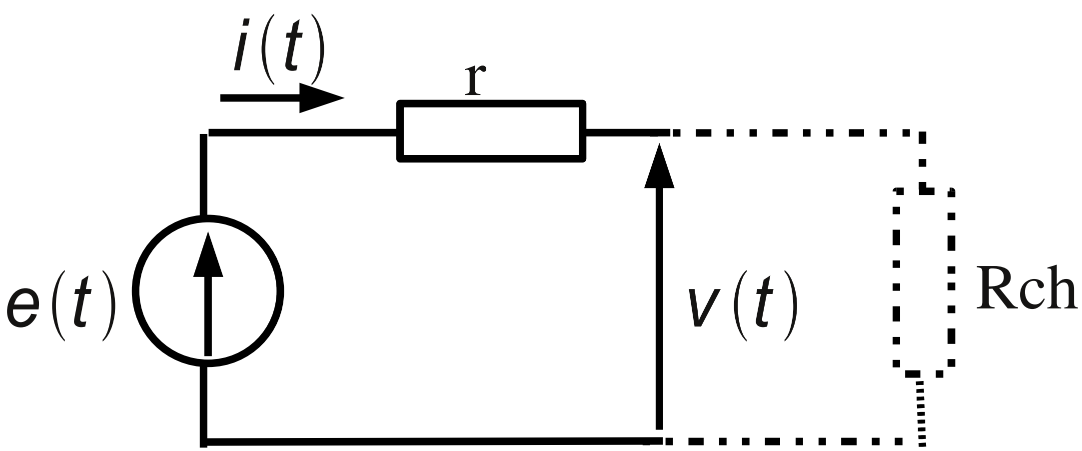


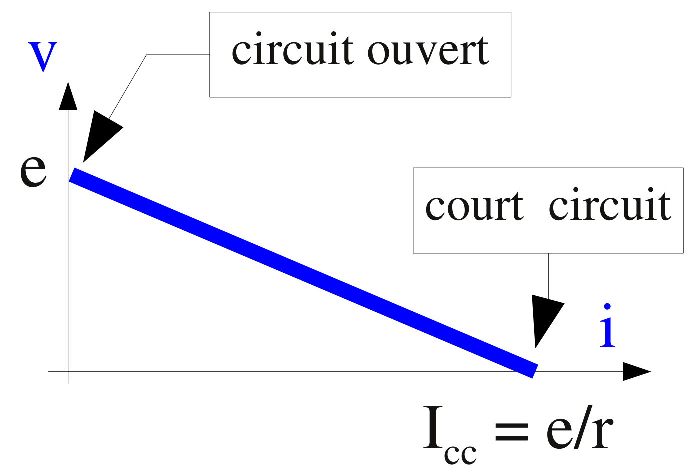


DIPÔLES

- source de tension réelle

Pour tenir compte du comportement physique réel, la source réelle possède une résistance interne non nulle.





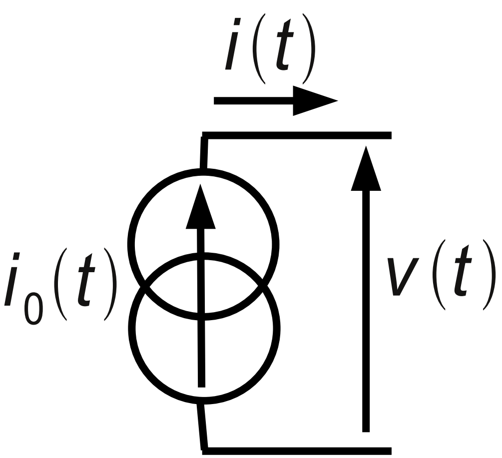
$$v(t) = e(t) - r \cdot i(t)$$

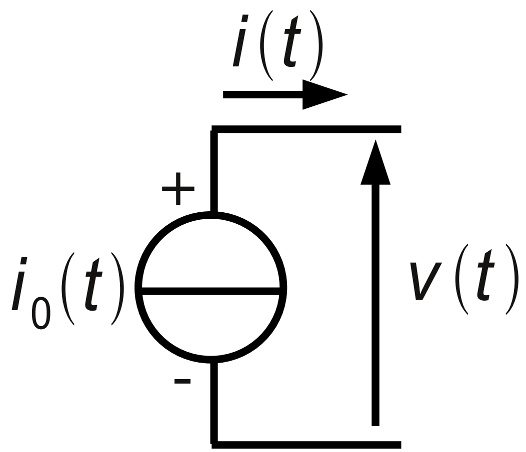
DIPÔLES

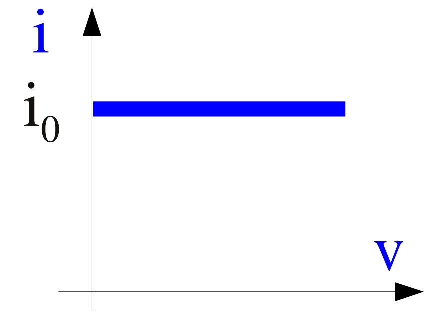
2) La source de courant

- source de courant idéale

Elle délivre un courant indépendant de la tension à ses bornes.



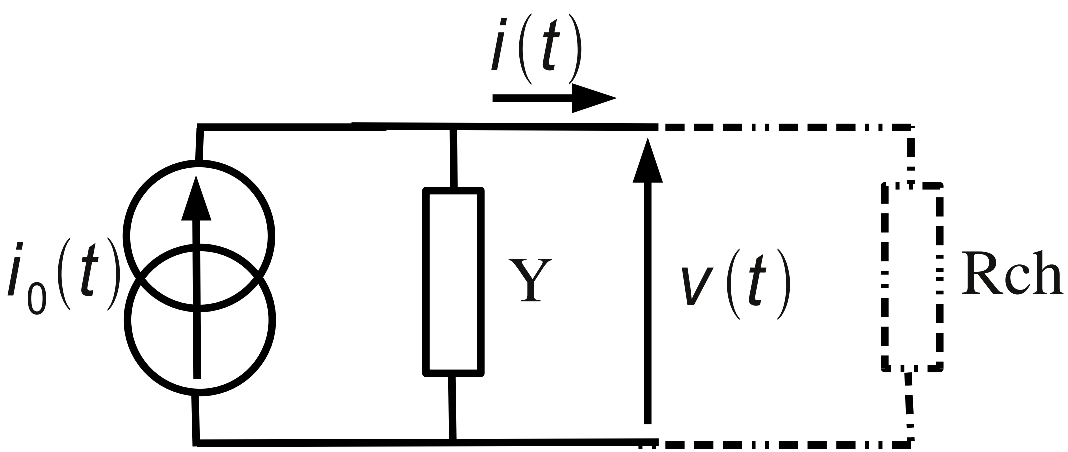


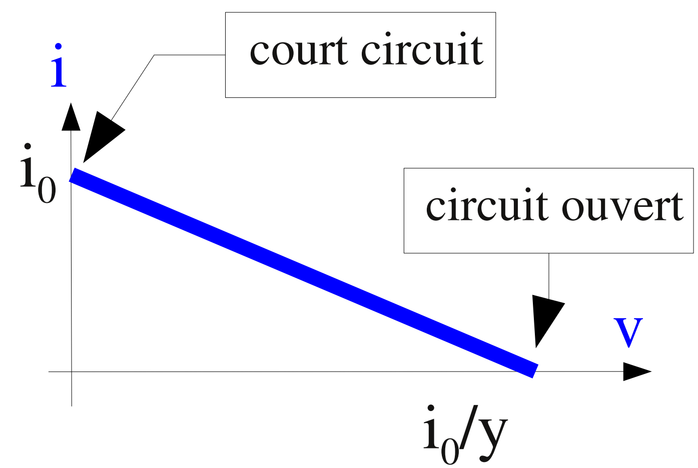


DIPÔLES

- source de courant réelle

Pour tenir compte du comportement physique réel, la source réelle possède une admittance interne non infinie.

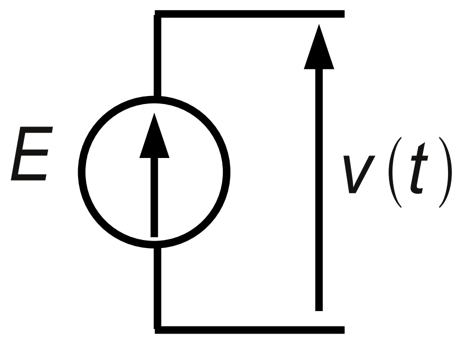


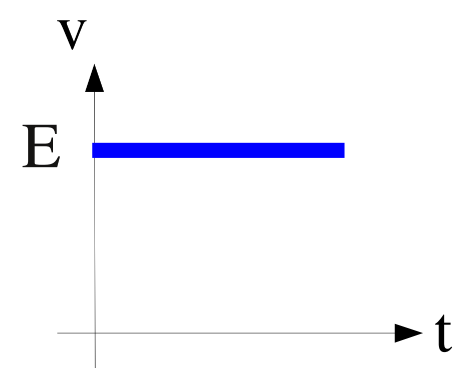


$$Y = \frac{1}{R} \qquad i(t) = i_0(t) - Y \cdot v(t)$$

III – Les dipôles en régime continu

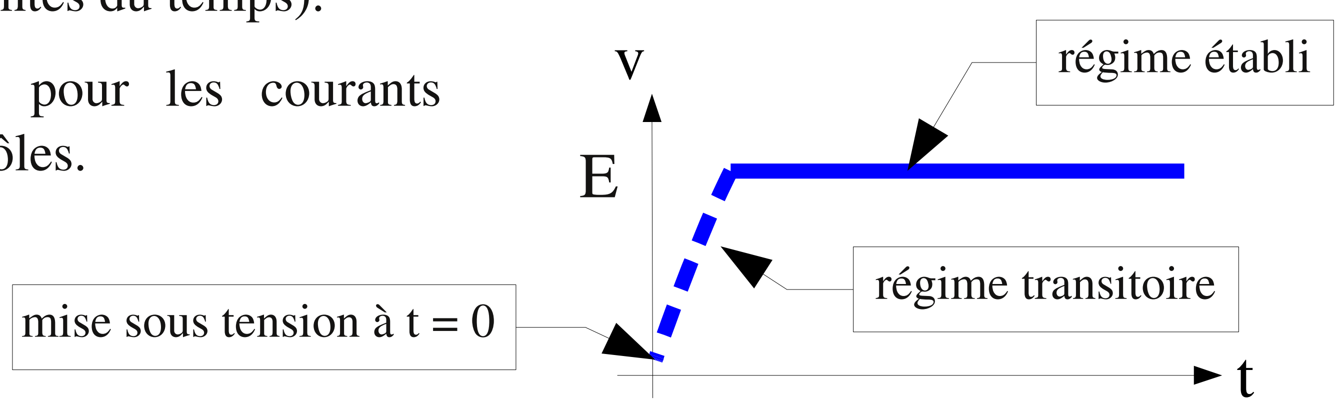
En régime continu, les tensions et courants fournis par les sources ont des valeurs fixes et indépendantes du temps.



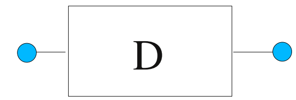


En régime établi, les ddp aux bornes des dipôles d'un circuit électrique seront donc constantes (indépendantes du temps).

Il en est de même pour les courants circulant dans ces dipôles.



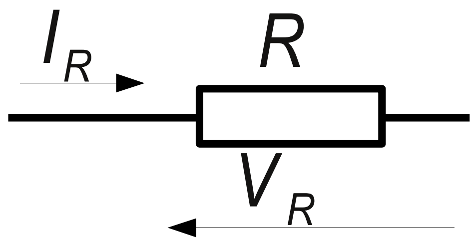
DIPÔLES



1) La résistance

Pour une résistance linéaire R :

$$V_R = R \cdot I_R$$

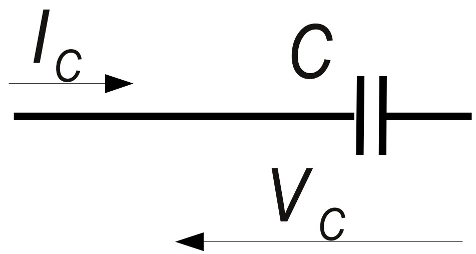


Puissance dissipée :

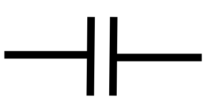
$$P_R = V_R \cdot I_R = R \cdot I_R^2 = \frac{V_R^2}{R}$$

2) Le condensateur

$$i_C(t) = C \cdot \frac{d\,v_C(t)}{dt}$$



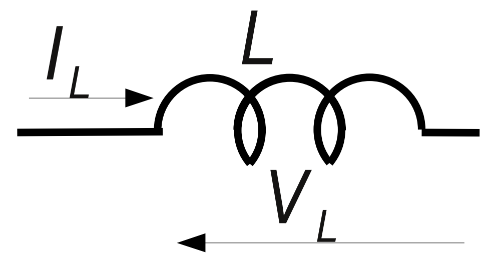
$$V_C = cte \rightarrow \frac{d\,V_C}{dt} = 0 \rightarrow I_C = 0$$

En régime continu établi :  $\Leftrightarrow$ 

circuit ouvert

Puissance dissipée : $P_C = 0$

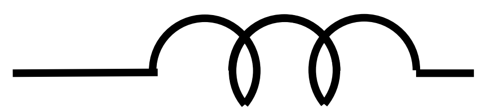
3) L'inductance



$$v_L(t) = L \cdot \frac{d\, i_L(t)}{dt}$$

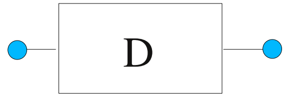
$$I_L = cte \rightarrow \frac{d\, I_L}{dt} = 0 \rightarrow V_L = 0$$

En régime continu établi :

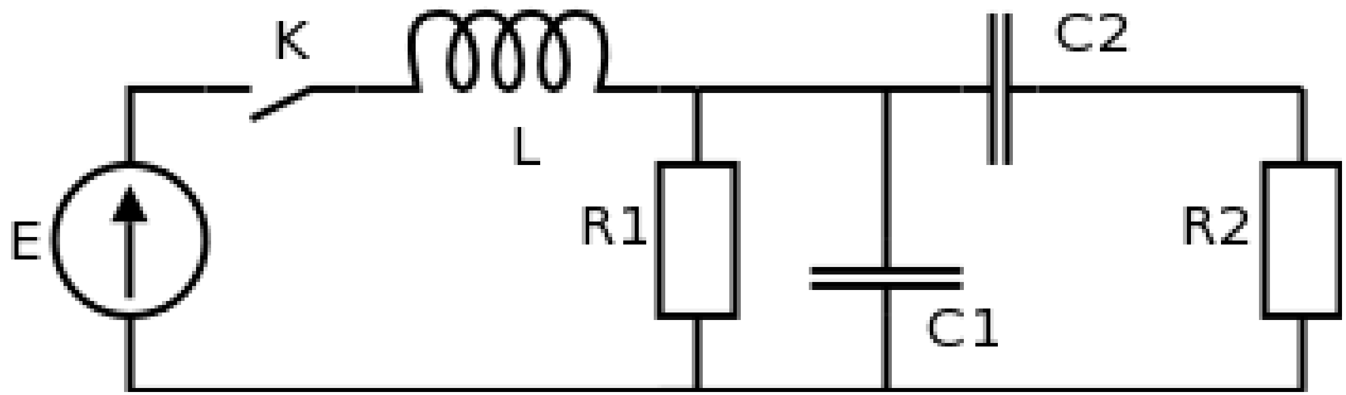


$\Leftrightarrow$ court circuit

Puissance dissipée : $P_L = 0$



Exemple



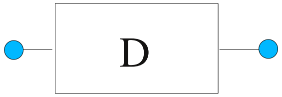
IV – Les dipôles en régime sinusoïdal

IV.1 – Le régime sinusoïdal

La forme d'onde sinusoïdale est une forme fondamentale :

- la plus grande partie de l'énergie électrique est produite sous forme de courant alternatif sinusoïdal,
- les fonctions trigonométriques (sin, cos) sont simples à manipuler mathématiquement,
- toute fonction quelconque périodique peut être décomposée en une somme de signaux sinusoïdaux (théorie de Fourrier).

DIPÔLES



1) La fonction sinusoïdale

Equation d'une tension : $u(t) = \hat{U} \cdot \sin \underbrace{(\omega \cdot t + \theta_U)}_{phase\ instantanée}$

t : temps en secondes

Û : valeur max de u(t)

θ_U : phase à l'origine

ω : pulsation en rad/s

$\omega = 2\,\pi\,f = 2\,\pi\,/\,T$

Valeur moyenne :

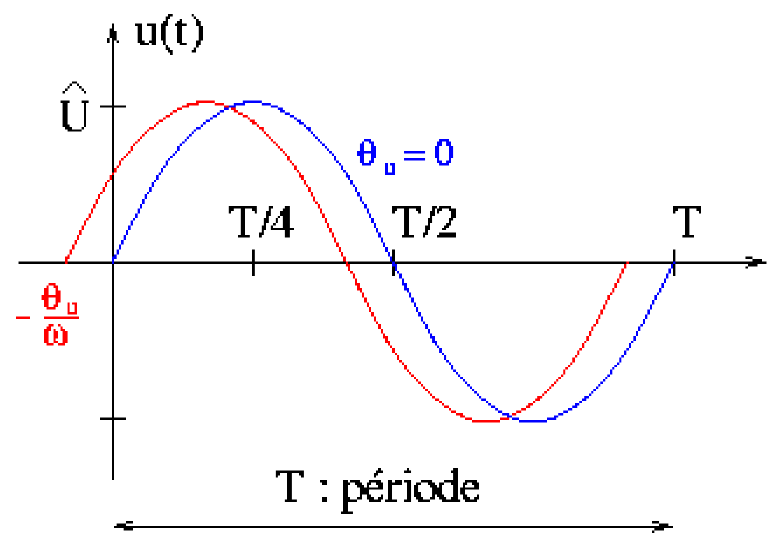
$$<u> = \bar{u} = \frac{1}{T}\int u(t)\,dt = 0$$

Valeur efficace :

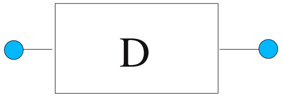
$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\,dt} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}$$

d'où :

$$u(t) = U\sqrt{2}\sin(\omega \cdot t + \theta_U)$$



$$T = \frac{1}{f}$$



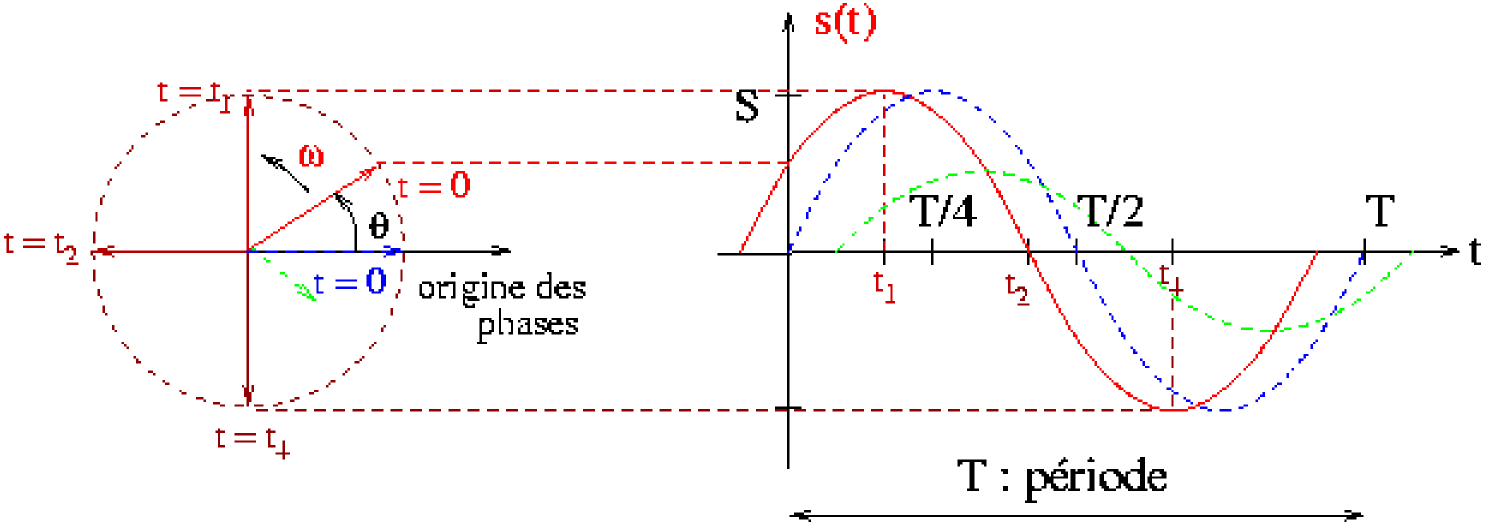
2) La représentation des signaux sinusoïdaux

Dans un circuit linéaire fonctionnant en régime permanent sinusoïdal, toutes les variables travaillent à la même fréquence :

- la valeur de la fréquence f (ou pulsation ω) est superflue,
- seuls importent l'amplitude et la phase du signal.

Ces deux variables peuvent être représentée par un vecteur. Par exemple pour :

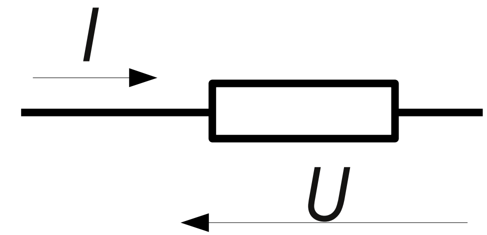
$$s(t) = S \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta)$$



DIPÔLES

3) La représentation de Fresnel

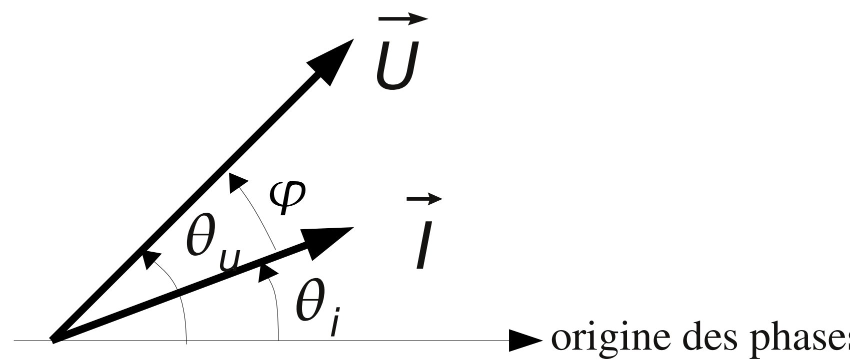
Chaque grandeur sinusoïdale est représentée par un vecteur :



- de longueur : la valeur efficace de la grandeur,
- d'angle par rapport à l'origine des phases : la phase à l'origine.

Pour un dipôle :

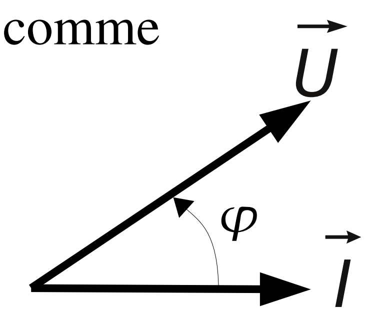
$$i(t) = I\sqrt{2}\cdot \cos(\omega \cdot t + \theta_i)$$
$$u(t) = U\sqrt{2}\cdot \cos(\omega \cdot t + \theta_u)$$



L'angle φ représente le déphasage de i par rapport à u, c'est l'angle allant de I vers V.

On peut choisir le courant (ou la tension) comme origine des phases.

$$i(t) = I\sqrt{2}\cdot \cos(\omega \cdot t)$$
$$u(t) = U\sqrt{2}\cdot \cos(\omega \cdot t + \phi)$$



Remarque : par convention une phase nulle pour un vecteur est obtenue à partir de la fonction cosinus.

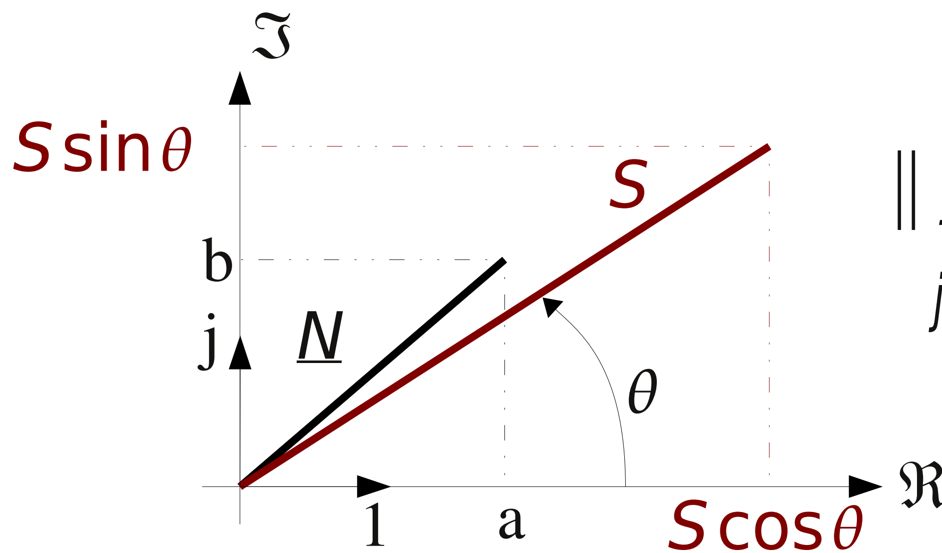
DIPÔLES

4) La notation complexe

$$\underline{N} = a + j\,b$$

Un vecteur de module S et de phase θ peut donc s'écrire :

$$\underline{S} = \underbrace{S\cos\theta}_{\textit{réelle}} + j\,\underbrace{S\sin\theta}_{\textit{imaginaire}}$$



$$\|\,j\,\| = 1$$

$$j^2 = -1$$

d'après la relation d'Euler :

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \quad \textit{soit :}\ \cos\theta = \Re\left(e^{j\theta}\right) \quad \textit{et} \quad \sin\theta = \Im\left(e^{j\theta}\right)$$

d'où : $\underline{S} = S\left[\cos\theta + j\sin\theta\right] = S\,e^{j\theta}$

Trois formes d'écriture sont possibles :

- trigonométrique : $\underline{S} = S\left(\cos\theta + j\sin\theta\right)$
- exponentielle : $\underline{S} = S\,e^{j\theta}$
- polaire : $\underline{S} = S^{\measuredangle}\ \theta$

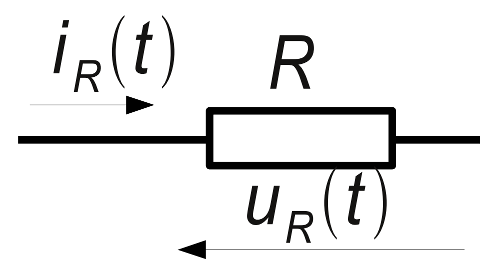
DIPÔLES

IV.2 – Caractéristiques des dipôles passifs en régime sinusoïdal

En régime sinusoïdal permanent, l'impédance d'un dipôle passif et linéaire est égal au quotient de la valeur efficace de la tension sur la valeur efficace du courant.

<u>1) La résistance</u> $Z = \dfrac{U}{I}$

U : tension efficace en volts (V)
I : courant efficace en ampères (A)
Z : impédance en ohms (Ω)



$$u_R(t) = R \cdot i_R(t)$$

$$i_R(t) = I_R\sqrt{2}\cos(\omega \cdot t)$$

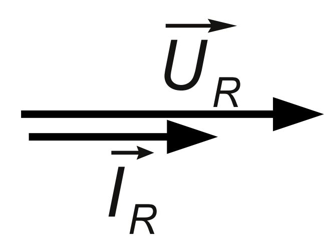
$$u_R(t) = R \cdot I_R\sqrt{2}\cos(\omega \cdot t) = U_R\sqrt{2}\cos(\omega \cdot t + \varphi)$$

égalité des modules : $R \cdot I_R\sqrt{2} = U_R\sqrt{2} \rightarrow U_R = R \cdot I_R$

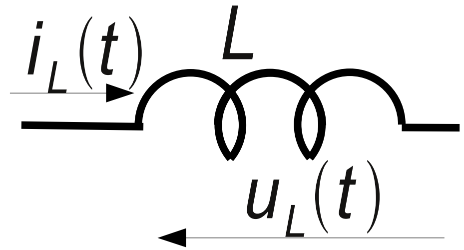
égalité des phases : $\omega \cdot t = \omega \cdot t + \varphi_R \rightarrow \varphi_R = 0$

⇒ Z = R

diagramme de Fresnel



2) L'inductance



$$u_L(t) = L \cdot \frac{d\,i_L(t)}{dt}$$

$$i_L(t) = I_L\sqrt{2}\cos(\omega \cdot t)$$

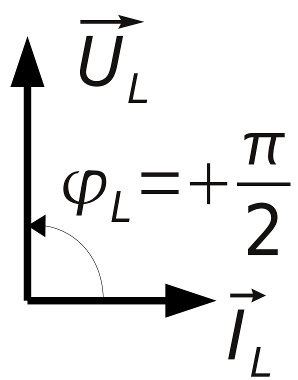
$$u_L(t) = L \cdot I_L\sqrt{2}\left(-\omega \cdot \sin(\omega \cdot t)\right) = U_L\sqrt{2}\cos(\omega \cdot t + \varphi)$$

égalité des modules : $L \cdot I_L\sqrt{2}\,\omega = U_L\sqrt{2} \;\rightarrow\; U_L = L\omega \cdot I_L \;\rightarrow\; Z = L\omega$

égalité des phases : $-\sin(\omega \cdot t) = \cos(\omega \cdot t + \varphi_L) \;\rightarrow\; \varphi_L = \pi/2$

car on sait que : $-\sin(a) = \cos(a + \pi/2)$

diagramme de Fresnel

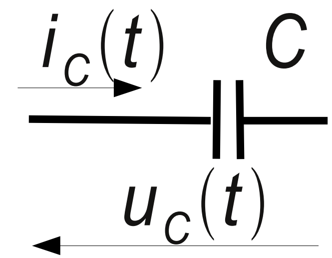


notation complexe

$$\underline{U_L} = j\,L\omega \cdot \underline{I_L}$$

+ 90 °

3) Le condensateur



$$i_C(t) = C \cdot \frac{d\,u_C(t)}{dt} \qquad i_C(t) = I_C\sqrt{2}\cos(\omega\cdot t)$$

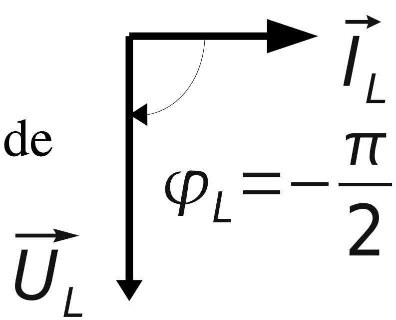
$$u_L(t) = \int \frac{I_C\sqrt{2}}{C}\cos(\omega\cdot t)\,dt = \frac{I_C\sqrt{2}}{C}\left[\frac{\sin(\omega\, t)}{\omega}\right] + K = U_L\sqrt{2}\cos(\omega\cdot t + \varphi)$$

égalité des valeurs moyennes : $\rightarrow \quad K = 0$

égalité des modules : $\dfrac{I_C\sqrt{2}}{C\,\omega} = U_C\sqrt{2} \;\rightarrow\; U_C = \dfrac{I_C}{C\,\omega} \;\rightarrow\; Z = \dfrac{1}{C\,\omega}$

égalité des phases : $\sin(\omega\cdot t) = \cos(\omega\cdot t + \varphi_L) \;\rightarrow\; \varphi_L = -\pi/2 \qquad (\sin(a) = \cos(a - \pi/2))$

diagramme de Fresnel



notation complexe $\underline{U}_C = \dfrac{1}{j\,C\,\omega}\,\underline{I}_C = \dfrac{-j}{C\,\omega}\,\underline{I}_C$

+ 90 °

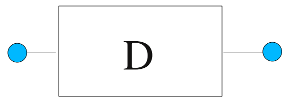
IV.3 – Puissances en régime sinusoïdal

1) Puissance instantané

Pour un dipôle : $i(t) = I\sqrt{2}\sin(\omega \cdot t)$ $\qquad u(t) = U\sqrt{2}\sin(\omega \cdot t + \varphi)$

$$
\begin{aligned}
p(t) &= u(t)\cdot i(t) \\
&= U\sqrt{2}\sin(\omega \cdot t + \varphi)\cdot I\sqrt{2}\sin(\omega \cdot t) \\
&= 2UI\,\sin(\omega \cdot t + \varphi)\cdot \sin(\omega \cdot t) \\
&= 2UI\cdot\frac{1}{2}\left[\cos(\omega \cdot t + \varphi - \omega \cdot t) - \cos(\omega \cdot t + \varphi + \omega \cdot t)\right] \\
&= UI\left[\underbrace{\cos(\varphi)}_{\textit{terme constant}} - \underbrace{\cos(2\omega \cdot t + \varphi)}_{\textit{terme de valeur moyenne nulle}}\right]
\end{aligned}
$$

DIPÔLES



2) Puissance active

C'est la valeur moyenne de la puissance instantanée :

$$P = \overline{p(t)} = U\,I\ \cos(\varphi)$$ exprimée en watt (W)

Elle représente une puissance qui est dissipée en chaleur ou qui fournit un travail mécanique.

3) Puissance réactive

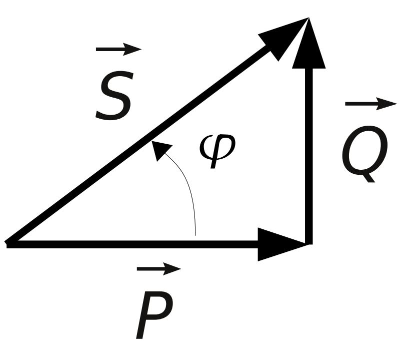
$$Q = U\,I\ \sin(\varphi)$$ exprimée en VAr

4) Puissance apparente

$$S = U\,I$$ exprimée en VA

5) Triangle des puissances

$$S^2 = P^2 + Q^2$$



DIPÔLES

6) Théorème de Boucherot

Pour un circuit composé de plusieurs dipôles, les puissances instantanées, actives et réactives absorbées par le circuit sont égales respectivement à la somme de ces puissances absorbées par chacun des dipôles du circuit.

$$\boxed{\begin{aligned} p(t) &= \sum_i p_i(t) \\ P &= \sum_i P_i \\ Q &= \sum_i Q_i \end{aligned}}$$

Attention $\quad S \neq \sum_i S_i$

7) Dipôles de base

	P	Q	φ
R	Ur Ir	0	0
C	0	Uc Ic	+90
L	0	Ul Il	-90