Modulation de fréquence (FM)

TP Électronique : 2

1 Principes Théoriques

1.1 Principe de la modulation de fréquence

Un signal harmonique (porteur d'information) dont l'amplitude est constante mais la fréquence varie en fonction de la valeur d'un autre signal (message), représente un signal modulé en fréquence. Comme dans tous les cas de modulation, le message est un signal basse fréquence (BF) et la porteuse un signal haute fréquence (HF).

L'intérêt principal de ce procédé résulte du fait que les parasites atmosphériques, qui provoquent une forte modulation d'*amplitude* par l'intermédiaire d'une atténuation variable dans le temps, ne provoquent qu'une faible déviation (modulation) de la fréquence. Un signal FM est donc plus robuste au bruit lors de la transmission par voie hertzienne qu'un signal AM.

Dans ce TP on explore les bases de la modulation FM en insistant sur la complexité du spectre obtenu.

1.2 Fréquence et phase du signal modulé

Soit :

$$v(t) = V_0 \cos(\Omega t) = V_0 \cos(2\pi F t)$$

la porteuse, de fréquence F, en l'absence de signal modulateur.

Le signal modulé en fréquence aura la forme générale :

$$v_{\mathrm{FM}}(t) = V_0 \cos\left[\Phi(t)\right] = V_0 \cos\left[\Omega t + \phi(t)\right] \tag{1}$$

où la phase $\Phi(t)$ du signal à l'instant t est égale à la somme de la phase de la porteuse non modulée, Ωt, et d'un autre terme $\phi(t)$ provenant de la modulation. La modulation de fréquence n'est donc qu'une forme spéciale de la modulation de phase.

La fréquence instantanée d'un signal $\cos[\Phi(t)]$ étant définie comme :

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t}$$

on peut calculer la fréquence instantanée du signal de la relation (1) :

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi}\left[\Omega + \frac{\mathrm{d}\phi(t)}{\mathrm{d}t}\right] = F + \frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{d}\phi(t)}{\mathrm{d}t} \tag{2}$$

On voit que la fréquence instantanée, proportionelle au rythme de variation de $\Phi(t)$, est égale à la fréquence de la porteuse F (sans modulation) à laquelle s'ajoute un terme de déviation, proportionnel au rythme de variation de $\phi(t)$.

On note $m(t)$ le message (de forme générale) BF à transmettre. Dans le cas d'une modulation de fréquence, c'est la *déviation de la fréquence instantanée* qui est proportionnelle au message, ce qui implique que la dérivée temporelle de la phase du signal modulé est proportionnelle au signal modulateur $m(t)$, soit $\mathrm{d}\phi(t)/\,\mathrm{d}t = \alpha m(t)$. La fréquence instantanée du signal FM s'écrit alors :

$$f_i(t) = F + \frac{1}{2\pi}\alpha m(t) = F + \alpha' m(t) \tag{3}$$

où la constante $\alpha' = \alpha/2\pi$, exprimée en $\mathrm{Hz\,V^{-1}}$, est une caractéristique de l'oscillateur commandé en tension (VCO) qui génère la modulation : elle correspond à la pente de sa caractéristique fréquence-tension autour de la fréquence F.

Si l'on se place dans le cas simple où $m(t)$ est un signal harmonique de fréquence f et d'amplitude v_0 :

$$m(t) = v_0\cos(\omega t) = v_0\cos(2\pi f t)$$

on obtient l'expression de la fréquence instantanée du signal modulé :

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi}\left[\Omega + k\cos(\omega t)\right] = F + \frac{1}{2\pi}k\cos(\omega t) \tag{4}$$

où $k = \alpha v_0$.

Dans ce cas simple, la fréquence instantanée du signal modulé oscille autour de la fréquence F de la porteuse ; la fréquence de l'oscillation est égale à f et son amplitude (déviation maximale de fréquence) égale à $k/2\pi$. Le spectre d'un tel signal sera alors assez compliqué, comme on verra dans le paragraphe 1.3.

La phase du signal modulé est alors donnée par :

$$\Phi(t) = 2\pi\int f_i(t)\,\mathrm{d}t = \Omega t + \underbrace{\frac{k}{\omega}\sin(\omega t)}_{\phi(t)} \tag{5}$$

Le terme Ωt représente la phase du signal non modulé. L'*excursion maximale de phase* par rapport à la phase du signal non modulé, c'est-à-dire la valeur maximale de $\phi(t)$, est définie comme l'*indice de modulation*

$$\beta = \frac{k}{\omega} = \frac{\alpha v_0}{2\pi f} = \alpha'\frac{v_0}{f} \tag{6}$$

et dépend du coefficient α' (propre au modulateur) et des caractéristiques (amplitude et fréquence) du signal modulant.

Si l'on note $\Delta\Omega_i$ et Δf_i les excursions maximales de pulsation et de fréquence instantanées par rapport à Ω et F, respectivement, on obtient une relation entre l'indice de modulation, l'excursion maximale de pulsation ou de fréquence et la pulsation ou la fréquence du signal modulant (équ. (4) et (6)) :

$$\beta = \frac{\Delta\Omega_i}{\omega} = \frac{\Delta f_i}{f}.$$

1.3 Spectre du signal modulé

À l'aide des relations (5) et (6), une porteuse modulée en fréquence par un signal harmonique (1) s'écrit alors sous la forme :

$$v_{\mathrm{FM}} = V_0 \cos[\Omega t + \beta \sin(\omega t)] \tag{7}$$

et en développant le cosinus de la somme on a :

$$v_{\mathrm{FM}} = V_0 \cos(\Omega t) \cos[\beta \sin(\omega t)] - V_0 \sin(\Omega t) \sin[\beta \sin(\omega t)] \tag{8}$$

Les termes $\cos[\beta \sin(\omega t)]$ et $\sin[\beta \sin(\omega t)]$ sont des fonctions périodiques et se développent en série de Fourier, dont les coefficients sont donnés par des fonctions de Bessel (sans démonstration. . .) :

$$\begin{aligned}
\cos[\beta \sin(\omega t)] &= J_0(\beta) + 2J_2(\beta)\cos(2\omega t) + 2J_4(\beta)\cos(4\omega t) + \dots \\
\sin[\beta \sin(\omega t)] &= 2J_1(\beta)\sin(\omega t) + 2J_3(\beta)\sin(3\omega t) + \dots
\end{aligned}$$

Par conséquent, on peut écrire $v_{\mathrm{FM}}(t)$ dans (8) sous la forme :

$$\begin{aligned}
v_{\mathrm{FM}}(t) = & V_0 J_0(\beta)\cos(\Omega t) + \\
& V_0 J_1(\beta)\left\{\cos[(\Omega+\omega)t] - \cos[(\Omega-\omega)t]\right\} + \\
& V_0 J_2(\beta)\left\{\cos[(\Omega+2\omega)t] - \cos[(\Omega-2\omega)t]\right\} + \\
& V_0 J_3(\beta)\left\{\cos[(\Omega+3\omega)t] - \cos[(\Omega-3\omega)t]\right\} + \dots
\end{aligned} \tag{9}$$

On constate que le spectre du signal modulé comprend les fréquences F (porteuse), $F+f$ et $F-f$ (premières harmoniques à droite et à gauche de la porteuse), comme dans la modulation d'amplitude, mais aussi toute une série de composantes dont la fréquence est de la forme $F+nf$ et $F-nf$, n étant un entier positif. Pour chaque valeur de n, l'amplitude de la paire des raies spectrales à $F \pm nf$ dépend de la valeur de l'indice de modulation par l'intermédiaire des fonctions de Bessel $J_n(\beta)$. L'espacement entre les raies correspond à la fréquence f du signal modulant.

La puissance transmise par les raies spectrales à $F \pm nf$ est proportionnelle à $J_n^2(\beta)$. Le comportement des fonctions de Bessel $J_n(x)$ (« de première espèce d'ordre n », Fig. 1) est tel que lorsqu'on augmente l'indice de modulation de 0 à 2.4, la puissance transmise par la porteuse ($n = 0$) diminue alors que celle des autres raies (message) augmente, ce qui permet d'augmenter le rendement de l'émetteur.

L'encombrement du spectre de fréquence (Fig. 2) est beaucoup plus important qu'en modulation d'amplitude. On peut montrer que 98% de la puissance du signal FM est contenu dans une bande de fréquences

$$B = 2(\beta + 1)f = 2(f + \Delta f)$$

autour de la porteuse F. Si $\beta \ll 1$, alors $B \approx 2\Delta f$ et l'occupation spectrale correspond à celle d'une modulation d'amplitude.

En résumé, le procédé de modulation de fréquence, peu sensible aux parasites, autorise une meilleure qualité de transmission hertzienne. Toutefois, la largeur du spectre nécessite l'utilisation d'une porteuse de fréquence élevée, en général supérieure à 50 MHz — bande (87.5–108)MHz pour la radio — dont la portée directe est très limitée (100 à 200 km).

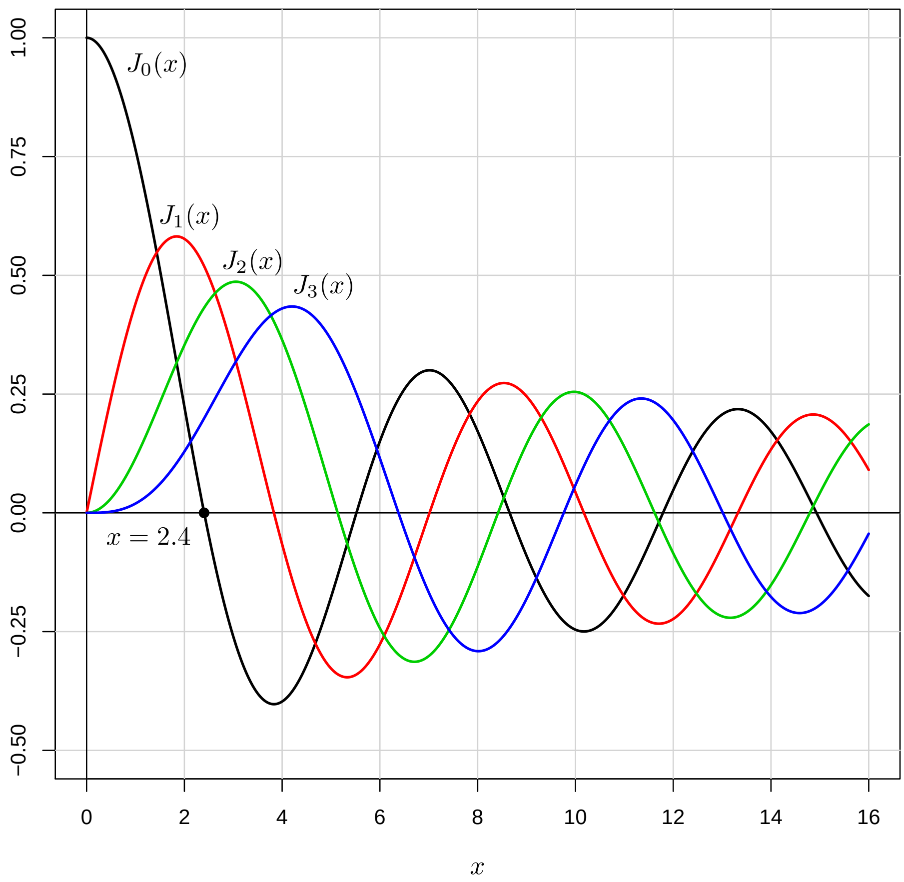

Fig. 1: Fonctions de Bessel $J_n(x)$, $n = 1, 2, 3, 4$.

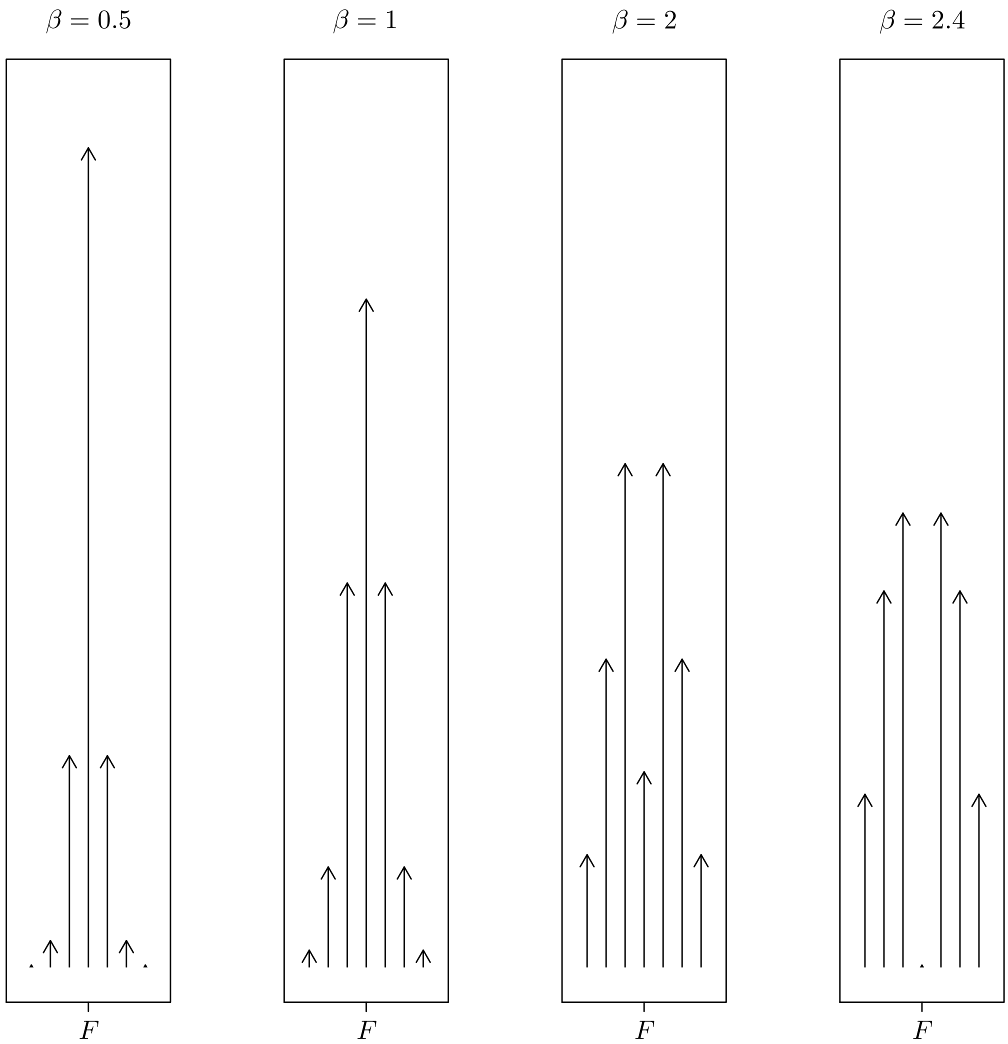

FIG. 2: Forme du spectre (échelle linéaire) pour différentes valeurs de l'indice de modulation β ; l'analyseur de spectre affiche normalement en échelle logarithmique (dBm).

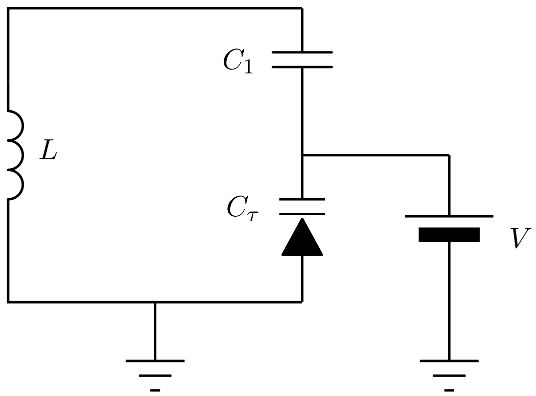

Fig. 3: Modulateur de fréquence à diode varicap

1.4 Modulation par circuit oscillant à diode varicap

L'un des montages les plus simples permettant d'obtenir un signal modulé est de placer une diode à capacité variable (varicap) dans un circuit oscillant.

En effet, toute diode semi-conducteur polarisée en inverse présente une capacité de transition :

$$C_\tau = \frac{K}{V^a}$$

où K est une constante, V est la tension aux bornes de la diode et a dépend du type de diode ($a = 1/2$ pour une jonction abrupte).

Lorsque l'on place une diode polarisée en inverse dans un circuit oscillant (Fig. 3) on peut alors faire varier la fréquence du circuit oscillant simplement en modifiant la tension de polarisation V.

La capacitance C_1 évite le passage du courant de polarisation dans le circuit oscillant.

En prenant pour valeur de C_τ par exemple

$$C_\tau = \frac{K}{V^{1/2}}$$

la capacité du circuit oscillant sera

$$C = \frac{C_1 C_\tau}{C_1 + C_\tau}$$

et la fréquence des oscillations

$$F = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Pour de petites variations de V autour de sa valeur initiale, on aura :

$$\frac{\mathrm{d}F}{F} = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}C}{C}$$

avec

$$\frac{\mathrm{d}C}{C} = \frac{C_1}{C_1 + C_\tau}\frac{\mathrm{d}C_\tau}{C_\tau}$$

et

$$\frac{\mathrm{d}C_\tau}{C_\tau} = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}V}{V}$$

soit

$$\frac{\mathrm{d}F}{F} = \frac{C_1}{4(C_1 + C_\tau)}\frac{\mathrm{d}V}{V}$$

d'où on obtient finalement

$$F(t) = \exp\left[\frac{C_1}{4(C_1 + C_\tau)}\right] V(t)$$

D'après la dernière équation, les petites variations de $V(t)$ autour d'une tension centrale (dc) donneront des variations de la fréquence d'oscillation $F(t)$ autour d'une fréquence centrale, ce qui correspond à une modulation de fréquence : la composante continue de la tension $V(t)$ détermine la fréquence de la *porteuse* et sa partie alternative constitue le *signal modulant*.

2 Préparation théorique

Pendant ce TP on relèvera les spectres correspondant aux valeurs de β suivants : $0.5, 1, \beta_1$ et 2. La valeur β_1 est celle pour laquelle la composante de fréquence F (porteuse) et les composantes de fréquence $(F \pm f)$ (premières harmoniques à gauche et à droite de la porteuse) ont la même amplitude.

Il faudra pour cela savoir quel est le spectre prévu par la théorie.

A l'aide des logiciels libres Octave ou Scilab (logiciels non disponibles dans la salle de TP) ou d'un calculateur scientifique avancé[1] , calculer l'amplitude des raies spectrales correspondant à la porteuse (F) et à quatre harmoniques de part et d'autre $(F \pm nf$, $n = 1, 2, 3, 4)$, selon la relation (9).

Dans un tableau, donner le rapport d'amplitude (en linéaire) entre chaque raie et la porteuse. Étant donné que l'analyseur de spectre affiche les puissances en dBm, convertir ces rapports en décibels et donner, dans un deuxième tableau, l'écart (en dB) entre la puissance de chaque raie du spectre et celle de la porteuse.

Ce dernier tableau sera utilisé dans la partie 3.3.2.

3 Manipulation

3.1 Étude qualitative d'un signal FM

On utilisera le générateur Agilent 33250A comme modulateur de fréquence (VCO) alors que le signal modulant (BF) sera fourni par le générateur HP 33120A.

[1]Par exemple http://www.meta-numerics.net/Samples/FunctionCalculator.aspx.

- Relier la sortie `OUTPUT` du 33120A à l'entrée `Modulation in` du 33250A.
- Sur le 33120A, générer un signal BF de fréquence $f = 0.5\,\text{Hz}$ et d'amplitude $v_0 = 1\,\text{V}$. Visualiser ce signal à l'oscilloscope et vérifier ses paramètres.
- Activer la sortie du 33250A (bouton `Output`). Générer un signal HF de fréquence $F = 800\,\text{kHz}$ et d'amplitude $V_0 = 1\,\text{V}$. Visualiser ce signal à l'oscilloscope et vérifier ses paramètres.
- Sur le 33250A, choisir une modulation (`Mod`) de fréquence (`Type FM`) externe (`Source Ext`). Régler la déviation maximale de fréquence (`Freq Dev`) à $100\,\text{kHz}$.
- Sur l'oscilloscope, trigger sur le signal HF et visualiser simultanément les deux signaux (BF et HF). Observer le signal HF et constater qu'il s'agit bien d'un signal modulé en fréquence.
- Étudier de façon qualitative l'influence des paramètres f, v_0, V_0 sur le signal FM.
- Mesurer les fréquences extrêmes du signal FM : on peut baisser f ou arrêter l'écran de l'oscilloscope (`RUN/STOP`).

3.2 Étude du VCO

Le 33250A en mode « FM externe » se comporte comme un oscillateur commandé en tension (VCO). Quand la tension du modulant est égale à $\pm 5\,\text{V}$ (la tension maximale, indiquée sur l'entrée `Modulation in`), la fréquence instantanée fournie par le 33250A est égale à $F \pm \Delta f_{\max}$ où $\Delta f_{\max}$ est la déviation maximale de fréquence, `Freq Dev` (réglée ici à $100\,\text{kHz}$). Cela veut dire que la caractéristique fréquence-tension du VCO est donnée par la relation :

$$f_i = F + \frac{\Delta f_{\max}}{v_{\max}} v \tag{10}$$

On retrouve donc la relation (3) avec $\alpha' = \Delta f_{\max}/v_{\max}$ et $v_{\max} = 5\,\text{V}$.

On vérifiera de façon expérimentale ce comportement.

- Choisir $v_0 = 5\,\text{V}$ et vérifier ce réglage.
- Mesurer, sur l'oscilloscope, la tension instantanée $v(t)$ et la fréquence instantanée $f_i(t)$ à différents instants temporels.
- Tracer sur papier millimétré la courbe $f_i = g(v)$.
- Calculer l'intercepte (ordonnée à l'origine) et la pente. Comparer les résultats avec la relation (10).

3.3 Analyse d'un signal modulé en fréquence

Cette partie a pour but l'analyse du spectre d'une onde modulée en fréquence, en fonction de l'indice de modulation β. L'analyse spectrale se fera sur l'analyseur de spectre HP 8591E.

3.3.1 Prise en main de l'analyseur de spectre

- Relier la sortie du 33250A à l'entrée de l'analyseur de spectre (ne pas enlever l'atténuateur).

- Régler la fréquence du modulant à $f = 20\,\text{kHz}$.
- Sur l'analyseur de spectre, choisir la fréquence (`FREQUENCY`) centrale (`CENTER FREQ`) égale à celle de la porteuse.
- Régler la largeur de la fenêtre spectrale (`SPAN`) à ce que soient visualisées les fréquences correspondant à la porteuse et à cinq harmoniques de part et d'autre.
- Vérifier que la résolution du filtre sélectif utilisé par l'analyseur (`RES BW`, affichée sur l'écran) vous permet de voir les détails du spectre FM.
- Appuyer sur `PEAK SEARCH` et positionner le marqueur sur la porteuse (touches `NEXT PK RIGHT`, `NEXT PK LEFT`).
- Centrer le spectre sur la porteuse en utilisant la fréquence du marqueur comme fréquence centrale (touche `MARKER` $\rightarrow$ `CF`).
- Vérifier que si l'on double V_0, la puissance de la porteuse augmente de 6 dB.
- Examiner, de façon qualitative, l'influence de f et de v_0 sur le spectre du signal FM. (On peut aussi faire le lien avec l'étude qualitative du paragraphe 3.1 en prenant $f = 0.5\,\text{Hz}$.)
  Revenir à la fin aux réglages initiaux ($f = 20\,\text{kHz}$, $v_0 = 1\,\text{V}$).

3.3.2 Mesure de spectres

L'objectif de cette partie est de générer des signaux FM ayant les valeurs de β utilisées dans la préparation théorique (paragraphe 2). On réglera chaque fois la tension BF de telle sorte que le spectre correspondant à la valeur de β examinée soit affiché sur l'analyseur de spectre. On comparera ensuite la valeur de v_0^{exp} appliquée avec la valeur v_0^{th} prévue par la théorie.

1. Régler v_0 à la plus petite valeur possible.
2. Utiliser la forme des fonctions de Bessel (Fig. 1) pour vérifier que le spectre obtenu correspond à une *petite valeur de* β, en tout cas inférieure à β_1. Si ce n'est pas le cas, utiliser un atténuateur à la sortie du 33120A. Expliquer clairement votre raisonnement et votre choix d'utiliser ou pas l'atténuateur.
3. À l'aide d'un T, relier la sortie du 33120A (après, éventuellement, l'atténuateur !) à un multimètre.
4. Pour chacune des valeurs de β ($0.5, 1, \beta_1$ et 2), régler v_0 afin d'obtenir le spectre correspondant sur l'écran de l'analyseur de spectre. La forme du spectre recherché a été calculée dans le tableau de la préparation théorique (rapports de puissance entre les harmoniques et la porteuse du signal, exprimés en dB).
   L'analyseur de spectre permet d'afficher un tableau avec les puissances des différents pics en dBm (pour l'activer appuyer sur `PEAK SEARCH`, ensuite sur `More 1 of 2` en bas à droite de l'écran, et passer `PK TABLE` sur `On` ; passer `PK SORT` sur `FRQ` pour numéroter les pics par ordre de fréquence, sinon ils sont classés par amplitude).
5. Imprimer le spectre (touche `COPY`) et noter la valeur de v_0^{exp} utilisée.
6. Comparer v_0^{exp} à v_0^{th} obtenue théoriquement d'après l'équation (6).