Statistiques Appliquées

TD 3
Variables aléatoires discrètes

3.1 Aléatoire ?

a. Une variable aléatoire X prend une seule valeur $x = c$. Calculer la fonction de probabilité $p_X(x)$, l'espérance $E[X]$ et la variance σ_X^2.

b. On nous dit que la variance σ_Y^2 d'une variable aléatoire Y est nulle. Quelle conclusion peut-on en déduire ?

3.2 Transformations

Soit X une variable aléatoire dont les valeurs possibles et équiprobables sont les entiers entre 0 et 9. Calculer les fonctions de probabilité suivantes :

a. $p_Y(y)$ de $Y = X \mod (3)$,

b. $p_Z(z)$ de $Z = 5 \mod (X+1)$.

3.3 Naissances

Une famille a déjà trois enfants quand les deux jumelles sont nées. Calculer la fonction de probabilité $p_F(f)$ du nombre de filles parmi les enfants. (La probabilité d'avoir un garçon à une naissance est égale à $p = 0.51$; les naissances sont indépendantes).

3.4 Température

La température d'une ville est représentée par une variable aléatoire C. Une journée est caractérisée « ordinaire » si la température ne s'éloigne pas plus qu'un écart-type de la valeur moyenne. Si $E[C] = \sigma_C = 10^o$C, quelles sont les valeurs extrêmes de la température en Fahrenheit lors d'une journée ordinaire ? ($F = 32 + \frac{9}{5}C$)

3.5 Normaliser et calculer

Une variable aléatoire X a comme fonction de probabilité :

$$p_X(x) = \begin{cases} x^2/a, & x \in \{-3,-2,-1,0,1,2,3\} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}.$$

Calculer :

a. les valeurs de a et de $E[X]$,

b. la fonction de probabilité $p_Z(z)$ de la v.a. $Z = (X - E[X])^2$,

c. la variance σ_X^2 à partir de $p_Z(z)$,

d. la variance σ_X^2 à partir de $p_X(x)$.

3.6 Jeu d'échecs

Fischer et Spassky jouent un match d'échecs où le premier qui gagne une partie gagne le match. Après dix parties nulles, le match est déclaré nul. La probabilité qu'une partie soit gagnée par Fischer est égale à 0.4 et la probabilité qu'elle soit gagnée par Spassky est égale à 0.3, indépendamment du résultat des parties précédentes.

a. Quelle est la probabilité que Fischer gagne le match ?

b. Quelle est la fonction de probabilité $p_N(n)$ du nombre des parties (durée du match) ?

3.7 Examen(s)

Un étudiant a le droit de se présenter jusqu'à n fois à un examen. La probabilité de réussir est chaque fois égale à p (indépendamment du nombre de fois qu'il s'est déjà présenté. . .). Calculer la fonction de probabilité du nombre des essais, sachant que l'étudiant réussit à l'examen.

3.8 Deux dés

On définit deux variables aléatoires : X représente la valeur maximale et Y la somme des deux dés (pour simplifier les calculs, on va considérer des dés spéciaux en forme de tétraèdre). Calculer :

a. la fonction de probabilité $p_Y(y)$,

b. la fonction de probabilité conditionnelle $p_{X|Y}(x|y)$,

c. la fonction de probabilité conjointe $p_{XY}(x, y)$; examiner l'indépendance de X et Y,

d. la fonction de probabilité marginale $p_X(x)$,

e. l'espérance conditionnelle $E[X|Y]$ et $E[Y|X]$,

f. l'espérance $E[X]$ et $E[Y]$.