Statistiques Appliquées

TD 2
Rappels sur les probabilités (suite et fin)

2.1 Test positif

Un test pour une maladie rare est supposé fiable dans 95% des cas : la probabilité que le test soit positif quand une personne est malade est égale à 0.95, et la probabilité qu'il soit négatif quand une personne n'est pas malade est aussi égale à 0.95. La probabilité qu'une personne soit malade est égale à 0.001 (0.1% de la population).

1. Quelle est la probabilité qu'un test soit positif ?
2. Une personne est testée positive. Quelle est la probabilité qu'elle soit atteinte de la maladie ?
3. Dans quelles conditions un test positif suggère que la personne est malade ? Interpréter le résultat.

Afin d'améliorer la fiabilité du dépistage, on répète le test dans le cas d'un résultat positif (évidemment, la fiabilité p_f de chaque test reste indépendante des résultats précédents).

4. Calculer la probabilité $P(P_n)$ que n tests successifs soient positifs.
5. Une personne est testée successivement n fois positive. Quelle est la probabilité qu'elle soit atteinte de la maladie ?
6. On notera N la valeur minimale de n qui donne une réponse supérieure à 0.9 à la question précédente. Déterminer numériquement la valeur de N dans le cas : $p_f = 0.9$, $p_m = 0.1$.
7. Donner une explication de l'évolution de la probabilité de la question 5 en fonction de n (en vous aidant d'un tableau ($1 \leq n \leq N$) de différentes probabilités que vous jugez utiles).

[Soit deux événements, A et B, et $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$. On dira que l'événement B suggère l'événement A si $P(A|B) > P(A)$.]

2.2 Trésor

On sait qu'un trésor peut se trouver à deux endroits, avec probabilité β et $1-\beta$, respectivement ($0 \leq \beta \leq 1$). On cherche au premier endroit et, si le trésor est là, on le découvre avec probabilité p.

Montrer que le fait de ne pas trouver le trésor au premier endroit suggère qu'il se trouve au second.

2.3 Indépendance ?

On lance deux dés. On définit les événements A_i et B_j comme suit : $A_i = \{\text{Le premier dé est } i\}$ et $B_j = \{\text{La somme des dés est égale à } j\}$

Examiner l'indépendance des événements A_i et B_j ($1 \leq i \leq 6$, $1 \leq j \leq 12$).