

# Statistique Appliquée

Iannis Aliferis

École Polytechnique de l'Université de Nice – Sophia Antipolis  
Département d'Électronique, 3<sup>e</sup> année, 2007–2008

[Iannis.Aliferis@unice.fr](mailto:Iannis.Aliferis@unice.fr)

<b>Introduction</b>	<b>2</b>
Le cours en bref . . . . .	3
Plan du cours . . . . .	4
Bibliographie . . . . .	5
<b>Rappels sur les Probabilités</b>	<b>6</b>
Définitions . . . . .	7
Exemple: lancer deux dés . . . . .	8
Ensembles . . . . .	9
Modèle probabiliste . . . . .	10
Propriétés . . . . .	11
Probabilité conditionnelle . . . . .	12
Un nouvel Univers . . . . .	13
Exemple: fausse alarme . . . . .	14
Théorème de probabilité totale . . . . .	15
Théorème de Bayes . . . . .	16
Inférence bayésienne . . . . .	17
Indépendance . . . . .	18
Quelques stratégies . . . . .	19
Compter = multiplier . . . . .	20
. . . ou diviser! . . . . .	21
<b>Variable Aléatoire Discrète (une seule)</b>	<b>22</b>
Définition . . . . .	23
V.A.: à usage unique . . . . .	24
Une partition naturelle de l'Univers . . . . .	25
Fonction de Probabilité . . . . .	26
Fonction d'une V.A. . . . .	27
Espérance de $X$ . . . . .	28
Grandeurs statistiques . . . . .	29
Espérance de $g(X)$ . . . . .	30
Fonction linéaire . . . . .	31
Calcul de la variance . . . . .	32
<b>Variables Aléatoires Discrètes (deux et plus)</b>	<b>33</b>

Deux variables aléatoires . . . . .	34
V.A. conditionnées . . . . .	35
Espérance conditionnelle. . . . .	36
Indépendance . . . . .	37
Deux variables aléatoires indépendantes . . . . .	38
Fonction de répartition. . . . .	39
Relation linéaire entre deux v.a. ? . . . . .	40
(exploration graphique) . . . . .	41
(exploration graphique 2) . . . . .	42
(conclusion) . . . . .	43
Covariance / coefficient de corrélation linéaire . . . . .	44
Indépendance / corrélation . . . . .	45
<b>Variables Aléatoires Continues</b> . . . . .	<b>46</b>
Définition. . . . .	47
Nombre de succès sur $n$ essais (v.a.d. binomiale) . . . . .	48
Fonction de répartition: v.a.d. vers v.a.c. . . . .	49
Densité de probabilité . . . . .	57
Fonction de répartition. . . . .	58
Exemple: v.a. uniforme et v.a. normale . . . . .	59
Fonction d'une V.A. . . . .	60
Grandeurs statistiques . . . . .	61
Fonction linéaire . . . . .	62
Deux variables aléatoires . . . . .	63
V.A. Conditionnées . . . . .	64
Espérance conditionnelle. . . . .	65
Indépendance . . . . .	66
<b>Statistique Descriptive</b> . . . . .	<b>67</b>
Quelques définitions. . . . .	68
Paramètres statistiques d'un échantillon . . . . .	69
Exemple: notes TP Elec 2006-2007 . . . . .	70
<b>Statistique Inférentielle: introduction</b> . . . . .	<b>71</b>
Objectif . . . . .	72
Échantillonnage: définition . . . . .	73
Une expérience aléatoire. . . . .	74
Échantillon: ensemble de variables aléatoires . . . . .	75
Paramètres statistiques d'un échantillon . . . . .	76
Cas spécial: caractère qualitatif (les proportions) . . . . .	77
Statistique inférentielle: feuille de route . . . . .	78
Distribution uniforme. . . . .	79
Distribution normale (gaussienne) . . . . .	81
Propriétés de la loi normale. . . . .	87
Somme de deux v.a. indépendantes . . . . .	88
[Théorème limite central] . . . . .	89
<b>Théorie d'échantillonnage – un échantillon</b> . . . . .	<b>90</b>
Distribution de la moyenne . . . . .	91
Distribution de la moyenne; $\sigma_X$ inconnue . . . . .	92
Distribution de Student . . . . .	93
Distribution de la variance . . . . .	94

Distribution du $\chi^2$ . . . . .	95
Distribution de la proportion . . . . .	96
<b>Théorie d'échantillonnage – deux échantillons</b>	<b>97</b>
Distribution de la différence des moyennes . . . . .	98
Distribution du rapport des variances . . . . .	99
Distribution de Fisher . . . . .	100
<b>Estimation – intervalles de confiance</b>	<b>101</b>
Définitions . . . . .	102
Estimation de la moyenne (1/3) . . . . .	103
Estimation de la moyenne (2/3): taille de l'échantillon . . . . .	104
Estimation de la moyenne (3/3) . . . . .	105
Estimation de la variance (un échantillon) . . . . .	106
Proportion = moyenne . . . . .	107
Estimation de la proportion . . . . .	108
Estimation du rapport des variances (deux échantillons) . . . . .	109
<b>Tests d'hypothèse</b>	<b>110</b>
Définitions . . . . .	111
Types et probabilités d'erreur . . . . .	112
Tests: la procédure à suivre . . . . .	113
Test sur une moyenne (1/3) . . . . .	114
Test sur une moyenne (2/3) . . . . .	115
Test sur une moyenne (3/3): taille de l'échantillon . . . . .	116
Test sur une variance (1/2) . . . . .	117
Test sur une variance (2/2) . . . . .	118
Test sur une proportion . . . . .	119
<b>Récapitulatif: un échantillon</b>	<b>120</b>
Statistiques d'un échantillon: moyenne . . . . .	121
Statistiques d'un échantillon: proportion, variance . . . . .	122
Estimation / tests: un échantillon . . . . .	123
<b>Intervalles et tests avec deux échantillons</b>	<b>124</b>
Distribution de la différence des moyennes (1/6) - rappel #98 . . . . .	125
Distribution de la différence des moyennes (2/6) . . . . .	126
Distribution de la différence des moyennes (3/6) . . . . .	127
Distribution de la différence des moyennes (4/6) . . . . .	128
Distribution de la différence des moyennes (5/6) . . . . .	129
Distribution de la différence des moyennes (6/6) . . . . .	130
Distribution de la différence des proportions . . . . .	131
Distribution du rapport des variances (1/2) - rappel #99 . . . . .	132
Distribution du rapport des variances (2/2) . . . . .	133
<b>Récapitulatif: deux échantillons</b>	<b>134</b>
Statistiques de deux (grands) échantillons: moyenne . . . . .	135
Statistiques de deux (petits) échantillons: moyenne . . . . .	136
Statistiques de deux échantillons: proportion, variance . . . . .	137
Estimation / tests: deux échantillons . . . . .	138
<b>Tests: au delà du seuil de signification</b>	<b>139</b>
Seuil descriptif (p-value) . . . . .	140

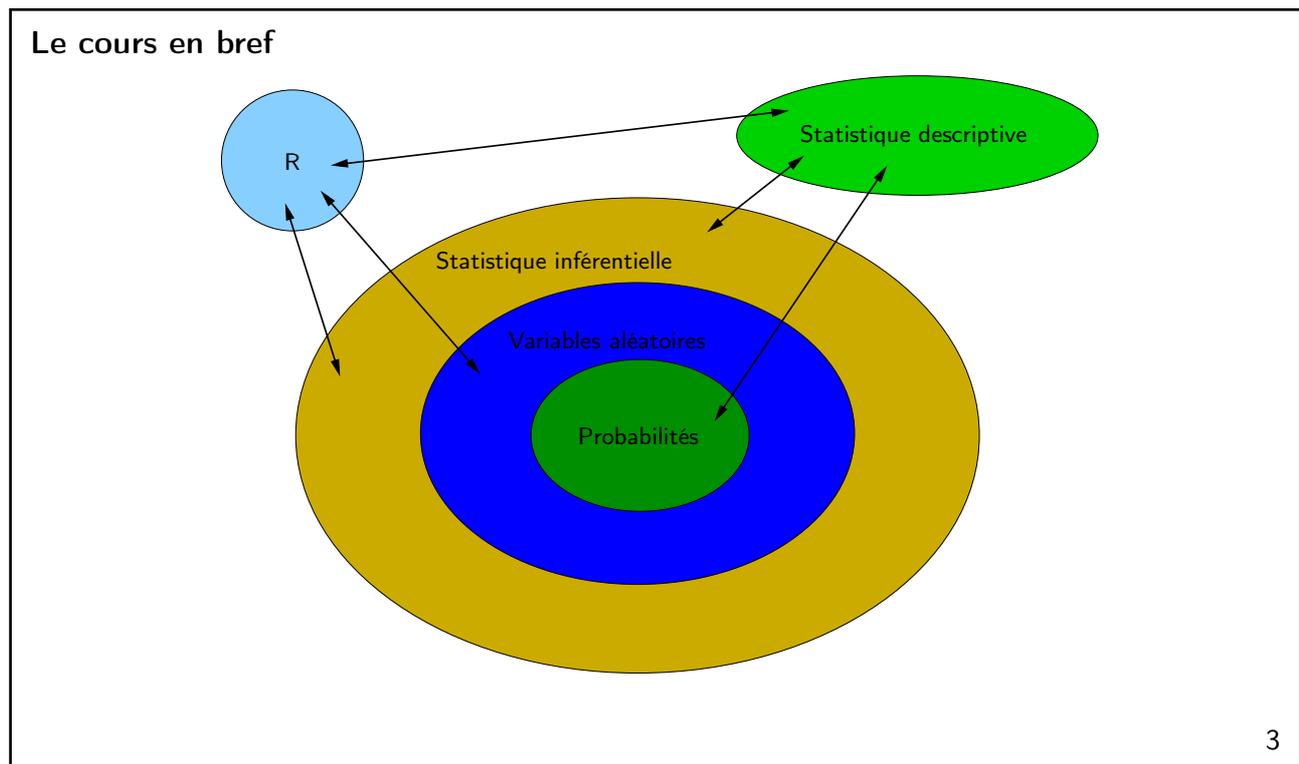
Seuil descriptif (p-value) : exemple (1/3) .....	141
Seuil descriptif (p-value) : exemple (2/3) .....	142
Seuil descriptif (p-value) : exemple (3/3) .....	143
<b>Test du <math>\chi^2</math></b> .....	<b>144</b>
Définition – cadre général .....	145
Test d'adéquation (ou d'ajustement) .....	146
Test d'indépendance / tableau de contingence .....	147
Test d'indépendance: correction de Yates .....	148
Test d'homogénéité .....	149
Test de proportions .....	152
Test de proportions sans estimation de paramètres .....	154
Test d'adéquation à la loi normale (Shapiro–Wilk) .....	155

*Ce document contient une grande partie des transparents du cours. Cela signifie qu'il n'est en aucun cas complet (auto-suffisant); une grande quantité d'information (commentaires, explications, diagrammes, démonstrations etc.) est donnée pendant les séances, oralement ou à l'aide du tableau, en plus de nombreux transparents « extra » qui ne sont pas inclus ici.*

 Le logo du logiciel R à droite d'un titre contient un lien vers le script utilisé pour produire les résultats présentés dans le transparent. L'exécution, l'étude et la compréhension des scripts font partie intégrante du cours.

## Introduction

2



### Plan du cours

- ▼ Rappels sur les probabilités
  - ▶ différentes définitions
  - ▶ probabilité conditionnelle
  - ▶ indépendance
- ▼ Variables aléatoires (discrètes et continues)
  - ▶ fonction/densité de probabilité
  - ▶ espérance, variance, moments
  - ▶ indépendance entre v.a.
- ▼ Statistique descriptive
  - ▶ moyenne, écart-type, quartiles, ...
  - ▶ histogrammes, boîtes à moustaches
- ▼ Statistique inférentielle
  - ▶ estimation
  - ▶ intervalles de confiance
  - ▶ tests d'hypothèse

4

## Bibliographie

- ▼ Probabilités, Variables Aléatoires :
  - ▶ P. Bogaert, "Probabilités pour scientifiques et ingénieurs", De Boeck, Bruxelles, 2006
  - ▶ D. Bertsekas, J. Tsitsiklis, "Introduction to Probability", Athena Scientific, Belmont, 2002
- ▼ Statistique :
  - ▶ T.H. Wonnacott, R.J. Wonnacott, "Introductory Statistics", 5th ed., Wiley, 1990
  - ▶ R.E. Walpole, R.H. Myers, "Probability and Statistics for Engineers and Scientists", Prentice Hall International, 1993.
- ▼ R (livres disponibles en ligne) :
  - ▶ E. Paradis, "R pour les débutants", 2005
  - ▶ W. N. Venables, D. M. Smith and the R Development Core Team, "An introduction to R", 2006
  - ▶ W. J. Owen, "The R Guide", 2006

## Rappels sur les Probabilités

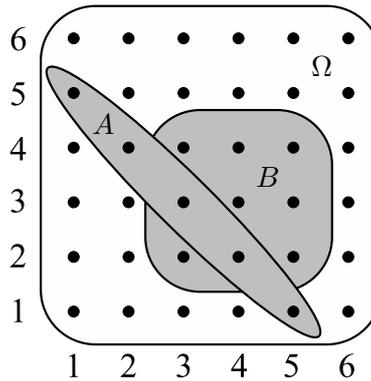
6

### Définitions

- ▼ **Expérience aléatoire** : plusieurs résultats possibles
- ▼ **Issue** ou **éventualité**  $\omega$  : un des résultats possibles
- ▼ **Univers**  $\Omega$  : l'ensemble de *tous* les résultats
- ▼ **Événement**  $A$  : un sous-ensemble de  $\Omega$
  
- ▼ Exemple :
  - ▶ « Compter le nombre de personnes présentes »
  - ▶  $\omega_1 = 1$  (au moins...),  $\omega_2 = 70$ , etc.
  - ▶  $\Omega = \{1, 2, \dots, N_{\max}\}$
  - ▶  $A = \{\text{il y a moins de 5 personnes}\} = \{1, 2, 3, 4\} \subset \Omega$

7

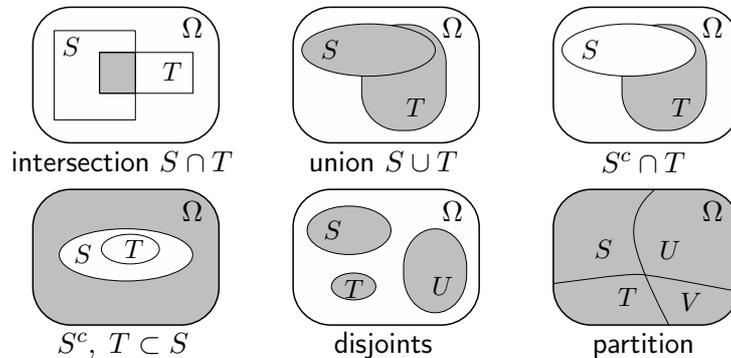
**Exemple : lancer deux dés**



- ▼  $\omega_1 = (1, 1), \omega_2 = (3, 4), \omega_3 = (4, 3), \dots$
- ▼  $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (1, 6), (2, 1), \dots, (6, 6)\}$
- ▼  $A = \{\text{la somme est égale à } 6\}$
- ▼  $B = \{\text{le } 1^{\text{er}} \text{ est entre } 3 \text{ et } 5; \text{ le } 2^{\text{nd}} \text{ entre } 2 \text{ et } 4\}$

8

**Ensembles**



- ▼ Disjoints :  $\bigcap_i S_i = \emptyset$  (mutuellement exclusifs)
- ▼ Partition :  $S_i$  disjoints et  $\bigcup_i S_i = \Omega$
- ▼ De Morgan 1 :  $(\bigcap_i S_i)^c = \bigcup_i S_i^c$
- ▼ De Morgan 2 :  $(\bigcup_i S_i)^c = \bigcap_i S_i^c$

9

### Modèle probabiliste

1. Définir l'ensemble  $\Omega$ .
2. Attribuer un nombre  $P(A) \in [0, 1]$  à un événement  $A$ .

▼ Définition classique (Laplace)

$$P(A) = \frac{\text{nombre de cas équiprobables favorables}}{\text{nombre de cas équiprobables possibles}}$$

▼ Définition intuitive (fréquence relative)

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n(A)}{n}$$

▼ Définition axiomatique (Kolmogorov)

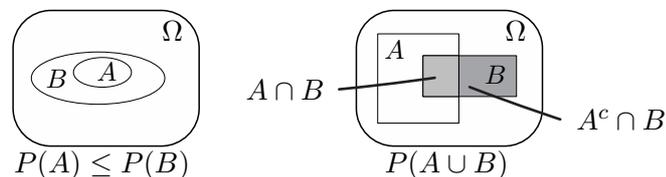
1.  $P(A) \geq 0$  pour chaque événement  $A \subseteq \Omega$
2.  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$  pour  $A$  et  $B$  disjoints
3.  $P(\Omega) = 1$

10

### Propriétés

1.  $P(A^c) = 1 - P(A)$   
dém. :  $P(\Omega) = P(A \cup A^c) \stackrel{A \cap A^c = \emptyset}{=} P(A) + P(A^c) = 1$
2.  $P(\emptyset) = 0 = P(\Omega^c)$
3. Si  $A \subset B$ ,  $P(A) \leq P(B)$
4.  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
5.  $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$
6.  $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(A^c \cap B) + P(A^c \cap B^c \cap C)$

▼ Interprétation graphique :

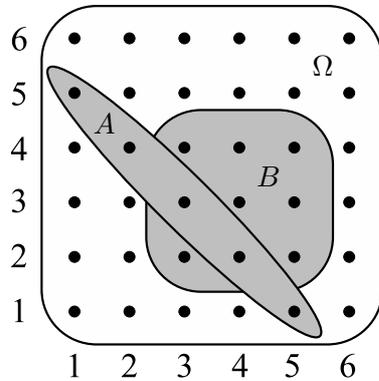


11

### Probabilité conditionnelle

Attribuer un nombre  $P(A|B) \in [0, 1]$  à un événement  $A$ , sachant que l'événement  $B$  ( $P(B) \neq 0$ ) a été réalisé.

▼ Exemple : lancer deux dés



▼ Toutes les issues  $\omega_i$  ( $i = 1, \dots, 36$ ) sont équiprobables

▼  $P(A) = -$

▼  $P(B) = -$

▼  $P(A|B) = - = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

▼

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

12

### Un nouvel Univers

▼ La probabilité conditionnelle satisfait les trois axiomes :

1.  $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq 0$  pour chaque événement  $A \subseteq \Omega$
2.  $P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B)$  pour  $A_1$  et  $A_2$  disjoints
3.  $P(\Omega|B) = 1$  (univers  $\Omega$ )

▼ Les propriétés générales restent valables, p.ex.,

$$P(A \cup C|B) \leq P(A|B) + P(C|B)$$

▼ On peut remplacer 3. par

$$3'. P(B|B) = \frac{P(B \cap B)}{P(B)} = 1 \text{ (univers } B)$$

▼  $P(A|B)$  : loi de probabilité ; univers :  $\Omega \rightarrow B$  !

▼ Approche séquentielle :

▶  $P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$

▶  $P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \dots P\left(A_n \mid \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)$

13

### Exemple : fausse alarme

▼ Système radar

- ▶ Avion : Présent / Absent
- ▶ Radar : Détection / Non détection
- ▶ Quatre issues possibles,  $\Omega = \{(P, D), (A, D), (P, N), (A, N)\}$
- ▶  $S = \{\text{un avion est présent}\} = \{(P, D), (P, N)\}$
- ▶  $T = \{\text{le radar signale la présence d'un avion}\} = \{(P, D), (A, D)\}$
- ▶  $P(S) = 0.05$  (présence d'un avion)
- ▶  $P(T|S) = 0.99$  (détection si avion présent)
- ▶  $P(T|S^c) = 0.10$  (fausse détection : « détection » si avion absent)

▼ Quelle est la probabilité d'une fausse alarme ?

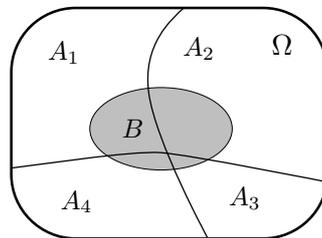
$$P(S^c \cap T) = \qquad \qquad \qquad = 0.095$$

▼ Quelle est la probabilité qu'un avion ne soit pas détecté ?

$$P(S \cap T^c) = \qquad \qquad \qquad = 0.0005$$

14

### Théorème de probabilité totale



- ▼  $A_1, A_2, \dots, A_n$  : une partition de  $\Omega$
- ▼  $B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \dots \cup (B \cap A_n)$
- ▼  $B \cap A_1, B \cap A_2, \dots, B \cap A_n$  : événements disjoints
- ▼  $P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_n)$   
 $\qquad \qquad \qquad = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \dots + P(A_n)P(B|A_n)$

▼ 
$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)$$
 *Diviser pour régner!*

15

### Théorème de Bayes

- ▼ « Cause »  $A \rightarrow$  « effet »  $B, P(B|A), P(B) \neq 0$
- ▼ À partir de  $P(B|A)$ , calculer  $P(A|B)$  (effet  $\rightarrow$  cause)
- ▼  $P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$

$$P(A|B) = P(A) \frac{P(B|A)}{P(B)}$$

- ▼ Plusieurs causes  $A_i (i = 1, \dots, n)$ , partition de  $\Omega$

$$P(A_i|B) = P(A_i) \frac{P(B|A_i)}{P(B)}$$

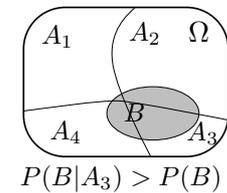
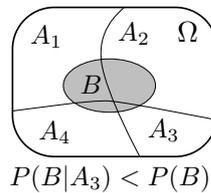
$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)}$$

16

### Inférence bayésienne

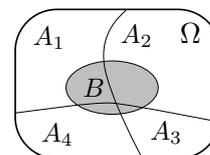
1.  $P(A_i|B) = P(A_i) \frac{P(B|A_i)}{P(B)}$

- ▼  $P(A_i)$  : *a priori*
- ▼  $P(A_i|B)$  : *a posteriori*
- ▼  $P(A_i|B) > P(A_i)$   
si  $P(B|A_i) > P(B)$



2.  $P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)}$

- ▼  $P(A_i)P(B|A_i) = P(B \cap A_i)$
- ▼  $P(A_i|B) \propto P(B \cap A_i)$



$P(A_2|B) > P(A_1|B) > P(A_4|B) > P(A_3|B)$

17

## Indépendance

1. Entre deux événements  $A$  et  $B$  :

▼  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

▼ si  $P(B) \neq 0$ ,  $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$

2. Entre deux événements  $A$  et  $B$ ,  
conditionnés par  $C$ , ( $P(C) \neq 0$ ) :

▼  $P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C)$

▼ si  $P(B|C) \neq 0$ ,  $P(A|B \cap C) = P(A|C)$

3. Entre plusieurs événements  $A_1, A_2, \dots, A_n$  :

▼  $P\left(\bigcap_{i \in S} A_i\right) = \prod_{i \in S} P(A_i)$   
pour *chaque*  $S$ , sous-ensemble de  $\{1, 2, \dots, n\}$

18

## Quelques stratégies

- ▼ Définir  $\Omega$
- ▼ ... ou juste *compter* ses éléments...
- ▼ Issues équiprobables :  $P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$  (Laplace)
- ▼ Approche séquentielle (+ indépendance)
- ▼ Probabilité totale (trouver une partition)
- ▼  $P(B|A) \longrightarrow P(A|B)$  : Bayes

19

### Compter = multiplier...

- ▼ Opération à  $M$  étapes,
- ▼ chacune pouvant être réalisée selon  $N_i$  façons ( $i = 1, \dots, M$ ).
- ▼ Nombre total des réalisations :

$$N = N_1 N_2 \dots N_M = \prod_{i=1}^M N_i$$

#### 1. Permutations de $n$ objets



$$n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1 = \boxed{n!}$$

#### 2. Permutations de $k$ objets choisis parmi $n$



$${}_n P_k = n(n-1)(n-2)\dots [n-(k-1)] = \boxed{\frac{n!}{(n-k)!}} = {}_n C_k k!$$

$$({}_n P_n = n! \longrightarrow 0! = 1)$$

20

### ... ou diviser !

#### 3. Combinaisons de $k$ objets choisis parmi $n$



$${}_n C_k = \binom{n}{k} = \frac{{}_n P_k}{k!} = \boxed{\frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

#### 4. Répartitions de $n$ objets dans $n_1, n_2, \dots, n_r$ groupes



$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}, \quad (n_1 + n_2 + \dots + n_r = n)$$

Méthode générale (*par étape*) :

- ▼  $n$  objets :  $n!$  permutations
- ▼  $n_i$  objets non distincts (identiques ou combinaisons) : diviser par  $n_i!$
- ▼ répéter pour tous les groupes d'objets

Multiplier pour toutes les étapes.

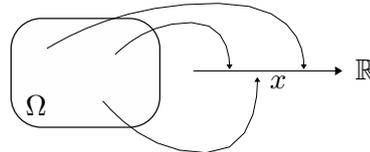
21

## Variable Aléatoire Discrète (une seule)

22

### Définition

- ▼ Associer *une valeur réelle*  $x$  à chaque issue  $\omega$  d'une expérience aléatoire
- ▼ Variable aléatoire discrète (VAD) :  
Nombre de valeurs possibles : fini ou infini dénombrable



- ▼ Une variable aléatoire est une **fonction**! ( $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ )
- ▼  $X$  : la variable aléatoire /  $x$  : une valeur possible
- ▼ Fonction de probabilité  $p_X(x)$  :

$$P(\underbrace{\{X = x\}}_{\text{événement} \in \Omega}) \stackrel{\text{simpl.}}{=} \boxed{P(X = x) \triangleq p_X(x)}$$

23

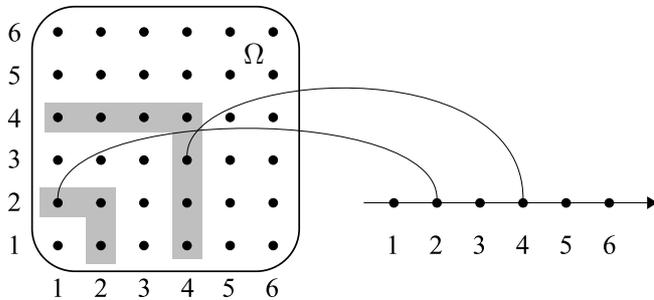
### V.A. : à usage unique

1. On « interroge » la v.a.  $X$
  2. L'expérience aléatoire associée **est effectuée**
  3. Une issue  $\omega \in \Omega$  est réalisée
  4. À l'issue  $\omega$  correspond une valeur  $x$
  5. La v.a.  $X$  « répond » avec la valeur  $x$
- ▼ Une v.a.  $X$  :
    1. représente une expérience aléatoire  
et une association  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$
    2. est à **usage unique** : **une seule** expérience effectuée!
  - ▼  $N$  v.a.  $X_1, X_2, \dots, X_N$  identiquement distribuées :
    1. représente, chacune, la même expérience aléatoire  
et la même association  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$
    2. est, chacune, à usage unique :  
la même expérience **répétée  $N$  fois**!

24

### Une partition naturelle de l'Univers

- ▼ Expérience : lancer deux dés ;  $X$  est la valeur maximale  
p.ex. :  $p_X(2) = P(\{X = 2\}) = \frac{3}{36}$

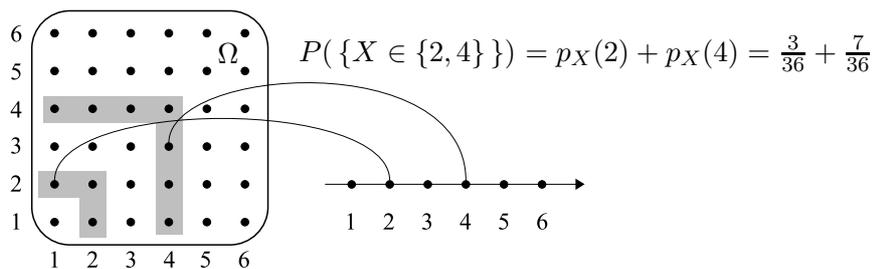


- ▼  $\bigcap_x \{X = x\} = \emptyset$
- ▼  $\bigcup_x \{X = x\} = \Omega$
- ▼ Les événements  $\{X = x\}$  forment une partition de  $\Omega$

25

### Fonction de Probabilité

- ▼ Normalisation :  
 $\sum_x p_X(x) = \sum_x P(\{X = x\}) \stackrel{\text{disj.}}{=} P(\bigcup_x \{X = x\}) \stackrel{\text{part.}}{=} P(\Omega) = 1$
- ▼  $P(\{X \in S\}) \stackrel{\text{disj.}}{=} \sum_{x \in S} p_X(x)$

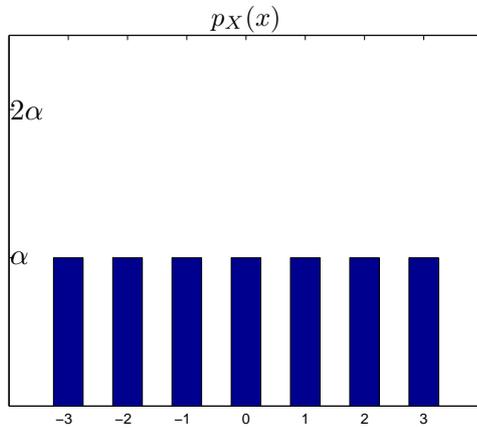


- ▼ Comment calculer  $p_X(x)$  :
  1. Trouver les valeurs possibles ; indiquer les valeurs impossibles
  2. Repérer les issues  $\omega_i$  constituant l'événement  $\{X = x\}$
  3. Additionner les probabilités  $P(\omega_i)$

26

### Fonction d'une V.A.

- ▼ Une fonction d'une V.A. est aussi une V.A.
- ▼  $Y = g(X)$
- ▼  $p_Y(y) = P(\{Y = y\}) = P(\{X \in S\}_{S=\{x|g(x)=y\}}) \stackrel{\text{disj.}}{=} \sum_{\{x|g(x)=y\}} p_X(x)$
- ▼ Exemple :  $X$  V.A. à distribution uniforme,  $x \in \{-3, -2, \dots, 3\}$ ;  $Y = |X|$



- ▼ Normalisation :  $\alpha =$

27

### Espérance de $X$

- ▼ v.a.d.  $X$  ;  $m$  valeurs possibles
  - ▼ classement par ordre :  $x_{(1)} < x_{(2)} < \dots < x_{(m)}$
  - ▼ Comment calculer une valeur « moyenne » ?
1. Répéter la même expérience  $n$  fois !  
(Considérer  $n$  v.a.  $X_1, X_2, \dots, X_n$  identiquement distribuées)
  2. Prendre la moyenne des  $n$  valeurs  $x_1, x_2, \dots, x_n$  obtenues :  
moyenne =  $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$   
regrouper  $\frac{x_{(1)}N_n(x_{(1)}) + x_{(2)}N_n(x_{(2)}) + \dots + x_{(m)}N_n(x_{(m)})}{n}$   
 $\xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_{(1)}p_X(x_{(1)}) + x_{(2)}p_X(x_{(2)}) + \dots + x_{(m)}p_X(x_{(m)})$   
 $= \sum_x xp_X(x) \triangleq E[X]$

28

## Grandeurs statistiques

### ▼ Espérance

$$\mu_X = E[X] = \sum_x xp_X(x)$$

centre de gravité de la distribution :

$$\sum_x (x - c)p_X(x) = 0, \quad c = E[X]$$

$p_X(x)$  : « masse de probabilité »

### ▼ Variance

$$\text{var}[X] = \sigma_X^2 = E[(X - E[X])^2] \geq 0$$

### ▼ Écart-type

$$\sigma_X = \sqrt{\text{var}[X]}$$

### ▼ n-ième moment (moment d'ordre $n$ ) : $E[X^n]$

### ▼ n-ième moment centré : $E[(X - E[X])^n]$

29

## Espérance de $g(X)$

### ▼

$$E[g(X)] = \sum_x g(x)p_X(x)$$

### ▼ $Y = g(X)$ , $p_Y(y) = \sum_{\{x|g(x)=y\}} p_X(x)$

$$\begin{aligned} \text{▼ } E[g(X)] &= E[Y] \\ &= \sum_y yp_Y(y) \\ &= \sum_y y \sum_{\{x|g(x)=y\}} p_X(x) \\ &= \sum_y \sum_{\{x|g(x)=y\}} yp_X(x) \\ &= \sum_y \sum_{\{x|g(x)=y\}} g(x)p_X(x) \\ &= \sum_x g(x)p_X(x) \end{aligned}$$

30

### Fonction linéaire

▼

$$Y = aX + b$$

▼

$$\boxed{E[Y] = aE[X] + b}$$

$$\boxed{\text{var}[Y] = a^2 \text{var}[X]} \quad \boxed{\sigma_Y = |a| \sigma_X}$$

- ▼  $E[Y] = E[aX + b] = \sum_x (ax + b)p_X(x) = a \sum_x xp_X(x) + b \sum_x p_X(x)$   
 $= aE[X] + b$
- ▼  $\text{var}[Y] = \text{var}[aX + b] = E[(aX + b - E[aX + b])^2]$   
 $= E[(aX + b - aE[X] - b)^2] = E[(aX - aE[X])^2]$   
 $= a^2 E[(X - E[X])^2] = a^2 \text{var}[X]$

31

### Calcul de la variance

▼

$$\boxed{\text{var}[X] = E[X^2] - (E[X])^2 \geq 0}$$

- ▼  $\text{var}[X] = E[(X - E[X])^2] = \sum_x (x - E[X])^2 p_X(x)$   
 $= \sum_x \{x^2 - 2xE[X] + (E[X])^2\} p_X(x)$   
 $= \sum_x x^2 p_X(x) - 2E[X] \sum_x xp_X(x) + (E[X])^2 \sum_x p_X(x)$   
 $= E[X^2] - 2(E[X])^2 + (E[X])^2 = E[X^2] - (E[X])^2$
- ▼  $\text{var}[X] = E[(X - \underbrace{E[X]}_{\text{cste}})^2] = E[X^2 - 2XE[X] + (E[X])^2]$   
 $= E[X^2] - 2E[X]E[X] + (E[X])^2 = E[X^2] - (E[X])^2$

32

## Variables Aléatoires Discrètes (deux et plus)

33

### Deux variables aléatoires

- ▼  $X, Y$  : V.A. associées à la même expérience aléatoire
- ▼ Fonction de probabilité conjointe :  

$$p_{XY}(x, y) \triangleq P(\underbrace{\{X = x\}}_{\text{événement} \in \Omega} \cap \underbrace{\{Y = y\}}_{\text{événement} \in \Omega}) \stackrel{\text{sim.}}{=} P(X = x, Y = y)$$
- ▼  $P((X, Y) \in A) = \sum_{(x,y) \in A} p_{XY}(x, y)$
- ▼ Fonctions de probabilité marginales :  

$$p_X(x) = \sum_y p_{XY}(x, y), \quad p_Y(y) = \sum_x p_{XY}(x, y)$$
- ▼  $Z = g(X, Y)$ ,  $p_Z(z) = \sum_{\{(x,y)|g(x,y)=z\}} p_{XY}(x, y)$   

$$E[Z] = E[g(X, Y)] = \sum_x \sum_y g(x, y) p_{XY}(x, y)$$
  

$$E[aX + bY + c] = aE[X] + bE[Y] + c$$
- ▼ Généralisation à  $n$  variables aléatoires

34

### V.A. conditionnées

- ▼ V.A. conditionnée par un événement  $A, P(A) \neq 0$

$$p_{X|A}(x) = P(\{X = x\}|A) = \frac{P(\{X = x\} \cap A)}{P(A)}$$

$$\bigcap_x (\{X = x\} \cap A) = \emptyset, \quad \bigcup_x (\{X = x\} \cap A) = A$$

$$P(A) = \sum_x P(\{X = x\} \cap A) \Rightarrow \sum_x p_{X|A}(x) = 1$$

- ▼ V.A. conditionnée par une autre V.A.

$$p_{X|Y}(x|y) = P(\{X = x\} | \underbrace{\{Y = y\}}_{p_Y(y) \neq 0}) = \frac{P(\{X = x\} \cap \{Y = y\})}{P(\{Y = y\})} = \frac{p_{XY}(x, y)}{p_Y(y)}$$

$$p_Y(y) = \sum_x p_{XY}(x, y) \Rightarrow \sum_x p_{X|Y}(x|y) = 1$$

Approche séquentielle :

$$p_{XY}(x, y) = p_X(x)p_{Y|X}(y|x) = p_Y(y)p_{X|Y}(x|y)$$

35

### Espérance conditionnelle

- ▼  $E[X|A] \triangleq \sum_x xp_{X|A}(x)$
- ▼  $E[g(X)|A] = \sum_x g(x)p_{X|A}(x)$
- ▼  $E[X|\{Y = y\}] \triangleq \sum_x xp_{X|Y}(x|y)$
- ▼  $E[X] = \sum_y p_Y(y)E[X|\{Y = y\}]$  (théorème d'espérance totale)
- ▼  $A_1, \dots, A_n$  : partition de  $\Omega$ ,  $P(A_i) \neq 0$   
 $E[X] = \sum_{i=1}^n P(A_i)E[X|A_i]$
- ▼  $A_1 \cap B, \dots, A_n \cap B$  : partition de  $B$ ,  $P(A_i \cap B) \neq 0$   
 $E[X|B] = \sum_{i=1}^n P(A_i|B)E[X|A_i \cap B]$

36

### Indépendance

- ▼ Entre une V.A.  $X$  et un événement  $A$  :
  - ▶  $P(\{X = x\} \cap A) = P(\{X = x\})P(A) = p_X(x)P(A)$ ,  $\forall x$
  - ▶ si  $P(A) \neq 0$ ,  $p_{X|A}(x) = p_X(x)$ ,  $\forall x$
- ▼ Entre deux V.A.  $X$  et  $Y$  :
  - ▶  $p_{XY}(x, y) = P(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = P(\{X = x\})P(\{Y = y\})$   
 $= p_X(x)p_Y(y)$ ,  $\forall x, y$
  - ▶  $p_{X|Y}(x, y) = p_X(x)$ ,  $\forall x$  et  $\forall y, p_Y(y) \neq 0$
  - ▶  $E[XY] = E[X]E[Y]$ ,  $\text{var}[X + Y] = \text{var}[X] + \text{var}[Y]$
- ▼ Entre  $n$  V.A.  $X_1, \dots, X_n$ 
  - ▶  $p_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) = p_{X_1}(x_1) \dots p_{X_n}(x_n)$ ,  $\forall x_1, \dots, x_n$
  - ▶  $E[X_1 \dots X_n] = E[X_1] \dots E[X_n]$
  - ▶  $\text{var}[X_1 + \dots + X_n] = \text{var}[X_1] + \dots + \text{var}[X_n]$

37

## Deux variables aléatoires indépendantes



Cliquer sur le logo pour télécharger le script R!

### ▼ R en 5 points

1. `x <- 5` équivalent à `x = 5`  
(les deux sont équivalents dans les versions récentes!)
2. `x = c(1, 2, 3)` : `x = (1, 2, 3)`  
(fonction de concaténation ; on la trouve partout!)
3. On utilise le point "." dans les noms à la place de "\_"  
(esp. `x.fois.y` n'est qu'un nom de variable!)
4. Obtenir de l'aide sur une commande :  
`?nom_de_la_commande` ou  
`help(nom_de_la_commande)`
5. Un document très utile :  
[Short-refcard.pdf](#) (4 pages)  
(plus la documentation proposée en [bibliographie](#))

38

## Fonction de répartition



$$F_X(x) \triangleq P(\{X \leq x\}) = \sum_{x' \leq x} p_X(x')$$

- ▼ Classement par ordre :  $x_{(1)} < x_{(2)} < \dots < x_{(m)}$

$$F_X(x_{(k)}) = P(\{X \leq x_{(k)}\}) = \sum_{i=1}^k p_X(x_{(i)})$$

### ▼ Propriétés :

- ▶  $F_X(x)$  : définie sur  $\mathbb{R}$  ; continue à droite
- ▶  $F_X(x_{(k)}) - F_X(x_{(k)}^-) = p_X(x_{(k)})$
- ▶ Monotone croissante (au sens large) :  
si  $x_1 < x_2$ ,  $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$
- ▶  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$
- ▶  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$
- ▶  $F_X(x_2) - F_X(x_1) = P(\{x_1 < X \leq x_2\})$

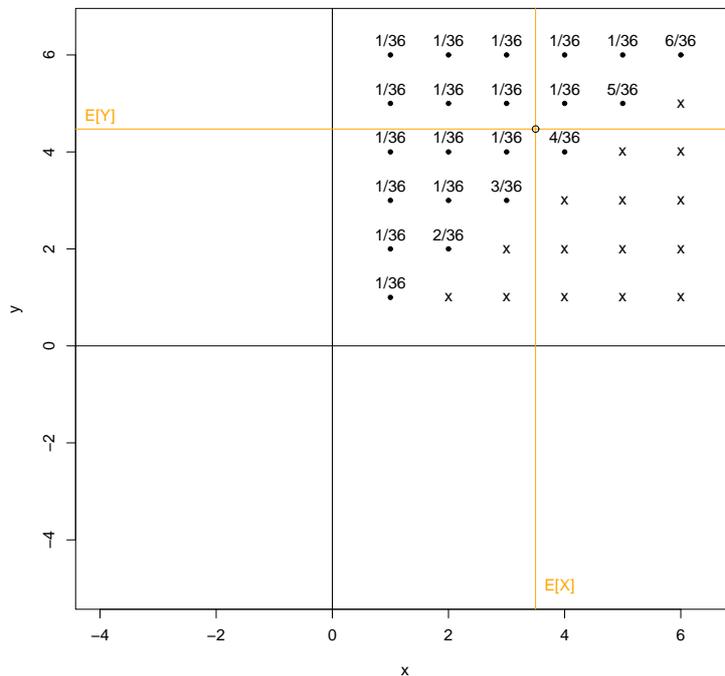
39

### Relation linéaire entre deux v.a. ?

- ▼  $X$  et  $Y$  associées à la même expérience aléatoire
- ▼ Est-ce que  $Y = aX + b$  ?  
Si oui :
  - ▶  $y = ax + b$  (les valeurs des v.a.)
  - ▶  $E[Y] = aE[X] + b$  (les espérances des v.a.)
- ▼ Comment « mesurer » la dépendance linéaire ?
- ▼ Exemple :  
Expérience aléatoire : lancer deux dés  
 $X$  : la valeur du premier dé  
 $Y$  : la valeur maximale des deux dés

40

### Relation linéaire ? (exploration graphique)



$$Y \stackrel{?}{=} aX + b$$

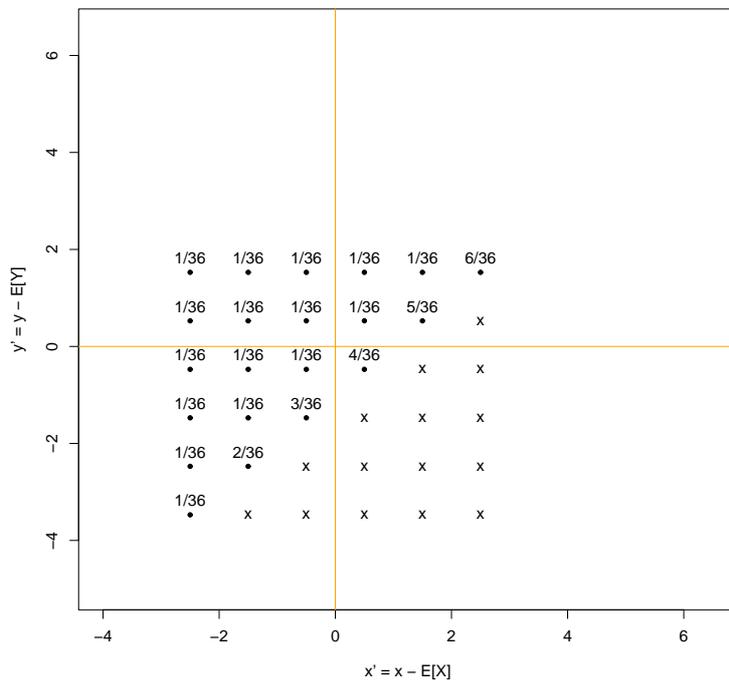
Si oui :

$$y = ax + b$$

$$E[Y] = aE[X] + b$$

41

### Relation linéaire ? (exploration graphique 2)



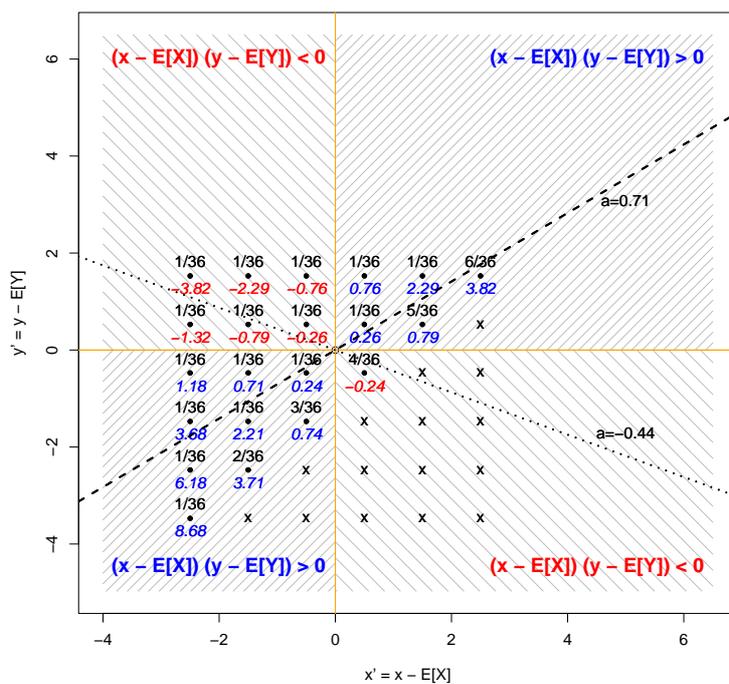
$Y \stackrel{?}{=} aX + b$   
 Si oui :  
 $y = ax + b$   
 $E[Y] = aE[X] + b$

$X' = X - E[X]$   
 $Y' = Y - E[Y]$   
 $Y' = aX'$

$x'y' = ?$

42

### Relation linéaire ? (conclusion)



$Y \stackrel{?}{=} aX + b$   
 Si oui :  
 $y = ax + b$   
 $E[Y] = aE[X] + b$

$X' = X - E[X]$   
 $Y' = Y - E[Y]$   
 $Y' = aX'$

$x'y' = ?$

$E[X'Y'] \approx$

43

### Covariance / coefficient de corrélation linéaire

▼ Covariance

$$\boxed{\text{cov}[X, Y] \triangleq E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y] = R_{XY} - \mu_X\mu_Y}$$

$$\text{cov}[X, X] = E[(X - E[X])(X - E[X])] = E[X^2] - E[X]^2 = \text{var}[X]$$

$\text{cov}[X, Y] \gg 0$  ou  $\ll 0$  : relation linéaire entre  $X$  et  $Y$

Quelles sont les valeurs extrêmes de  $\text{cov}[X, Y]$  ?

Si  $Y = aX + b \Rightarrow \text{cov}[X, Y] = \dots = a\text{var}[X] = a\sigma_X^2 \stackrel{\sigma_Y = |a|\sigma_X}{=} \text{sign}(a)\sigma_X\sigma_Y$

$$-\sigma_X\sigma_Y \leq \text{cov}[X, Y] \leq +\sigma_X\sigma_Y$$

▼ Coefficient de corrélation linéaire

$$\boxed{\rho \triangleq \frac{\text{cov}[X, Y]}{\sigma_X\sigma_Y} \quad -1 \leq \rho \leq +1 \quad \rho = \text{sign}(a) \text{ si } Y = aX + b}$$

44

### Indépendance / corrélation

▼ Coefficient de corrélation linéaire

$$\rho = \frac{\text{cov}[X, Y]}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{E[XY] - E[X]E[Y]}{\sigma_X\sigma_Y}$$

▼ Corrélation entre  $X$  et  $Y$

$$\boxed{R_{XY} \triangleq E[XY]} = \sum_x \sum_y xy p_{XY}(x, y)$$

▼  $E[XY] \stackrel{\text{ind.}}{=} E[X]E[Y] \Rightarrow \rho = 0$

▼ Si  $X$  et  $Y$  indépendantes  $\Rightarrow$  décorrélées

▼ Attention (1) : l'inverse n'est pas nécessairement vraie !  
(examiner, p.ex.,  $X$  et  $Y = |X|$  dans le cas où  $E[X] = 0$ )

▼ Attention (2) : « corrélées / décorrélées » se réfère à  $\rho$   
( $\neq$  corrélation  $R_{XY}$  !)

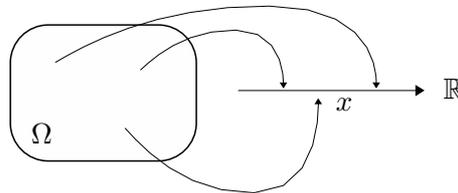
45

## Variables Aléatoires Continues

46

### Définition

- ▼ Associer *une valeur réelle* à chaque issue d'une expérience aléatoire
- ▼ Nombre de valeurs possibles : infini (non dénombrable)



### Exemples :

- ▶ la vitesse d'une voiture
- ▶ le temps entre l'arrivée de deux clients
- ▶ la « position » d'un électron
- ▶ l'énergie d'une particule

47

### Nombre de succès sur $n$ essais (v.a.d. binomiale)

- ▼ Expérience aléatoire : lancer  $n$  « pièces »
- ▼ Les pièces sont indépendantes : « pile » avec probabilité  $p$  indépendamment des autres résultats
- ▼ La pièce  $i$  est représentée par une v.a.d.  $X_i$  de Bernoulli :  
 $x_i = 1$  si « pile »,  $x_i = 0$  si « face »
- ▼ Nombre de « piles » sur  $n$  essais :  
 $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n = \sum_{i=1}^n X_i$
- ▼  $X$  : somme de  $n$  v.a. Bernoulli indépendantes
- ▼  $X$  : v.a. binomiale de paramètres  $p, n$  (v.a. discrète)

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (0 \leq k \leq n)$$

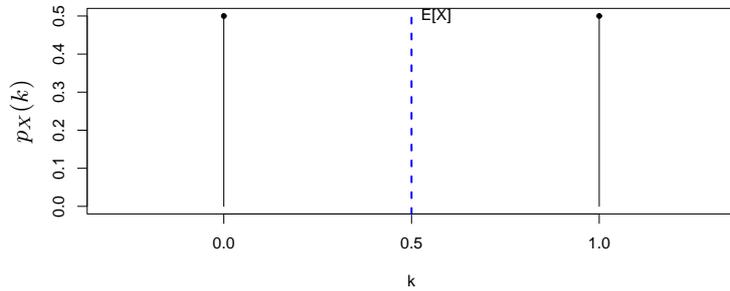
- ▼  $E[X] = \sum_{i=1}^n E[X_i] = nE[X_i] = \boxed{np}$
- ▼  $\text{var}[X] \stackrel{\text{ind}}{=} \sum_{i=1}^n \text{var}[X_i] = n\text{var}[X_i] = \boxed{np(1-p)}$
- ▼ (Comment faire la transition v.a.d.  $\rightarrow$  v.a.c. ?)

48

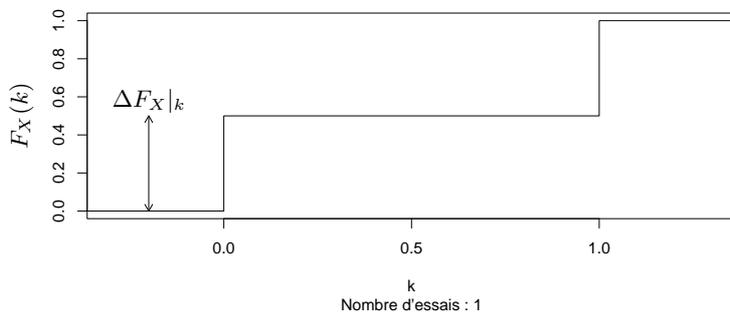


Fonction de répartition : v.a.d. vers v.a.c.

Fonction de probabilité,  $p_X(k) = P(\{X = k\})$



Fonction de répartition,  $F_X(k) = P(\{X \leq k\})$

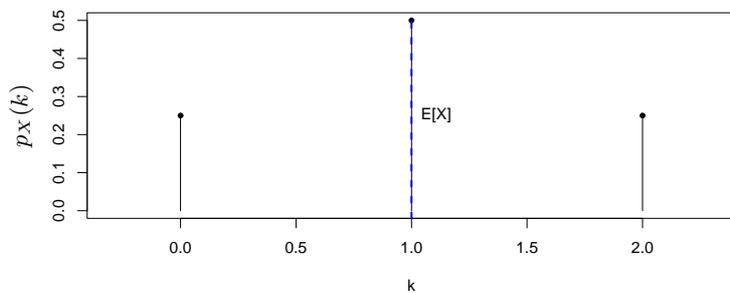


- V.A.D.
- ▼  $F_X(b) - F_X(a) = P(\{a < X \leq b\})$
  - ▼  $F_X(k) - F_X(k^-) \triangleq \Delta F_X|_k = P(\{X = k\}) = p_X(k)$

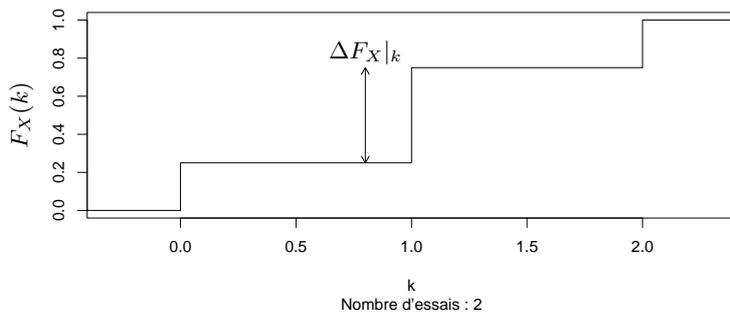
49

Fonction de répartition : v.a.d. vers v.a.c.

Fonction de probabilité,  $p_X(k) = P(\{X = k\})$



Fonction de répartition,  $F_X(k) = P(\{X \leq k\})$

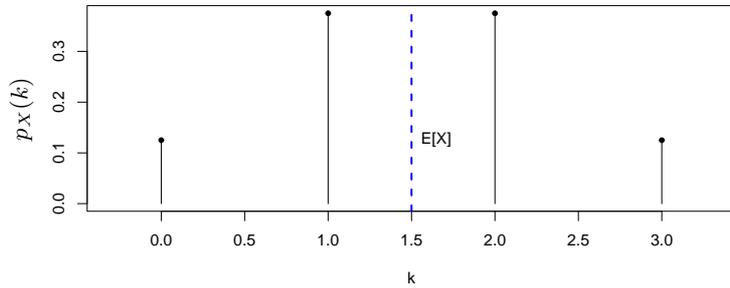


- V.A.D.
- ▼  $F_X(b) - F_X(a) = P(\{a < X \leq b\})$
  - ▼  $F_X(k) - F_X(k^-) \triangleq \Delta F_X|_k = P(\{X = k\}) = p_X(k)$

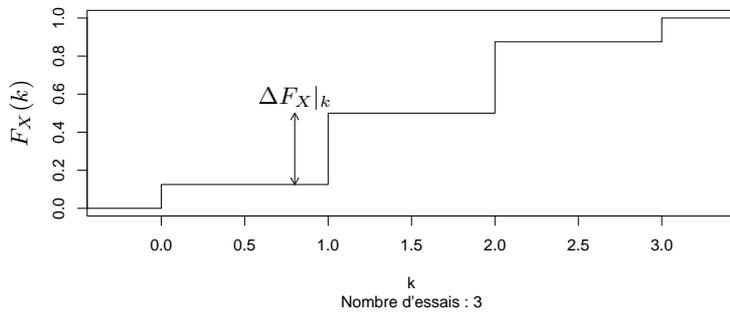
50

**Fonction de répartition : v.a.d. vers v.a.c.**

Fonction de probabilité,  $p_X(k) = P(\{X = k\})$



Fonction de répartition,  $F_X(k) = P(\{X \leq k\})$

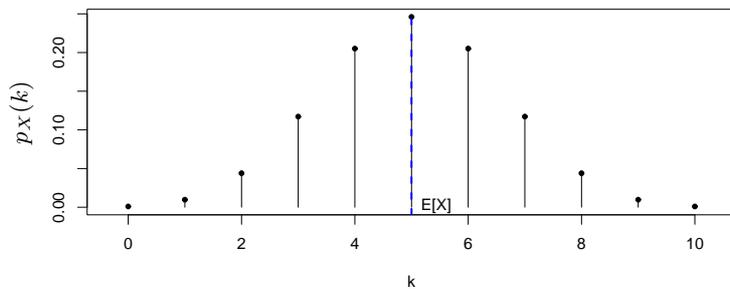


- V.A.D.
- ▼  $F_X(b) - F_X(a) = P(\{a < X \leq b\})$
  - ▼  $F_X(k) - F_X(k^-) \triangleq \Delta F_X|_k = P(\{X = k\}) = p_X(k)$

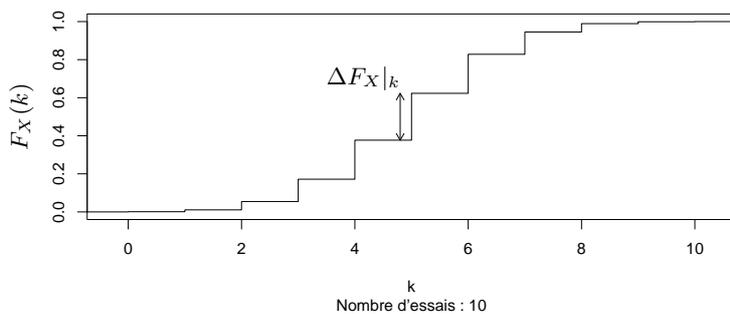
51

**Fonction de répartition : v.a.d. vers v.a.c.**

Fonction de probabilité,  $p_X(k) = P(\{X = k\})$



Fonction de répartition,  $F_X(k) = P(\{X \leq k\})$

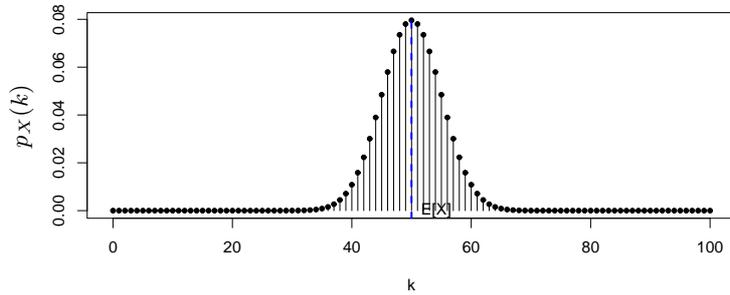


- V.A.D.
- ▼  $F_X(b) - F_X(a) = P(\{a < X \leq b\})$
  - ▼  $F_X(k) - F_X(k^-) \triangleq \Delta F_X|_k = P(\{X = k\}) = p_X(k)$

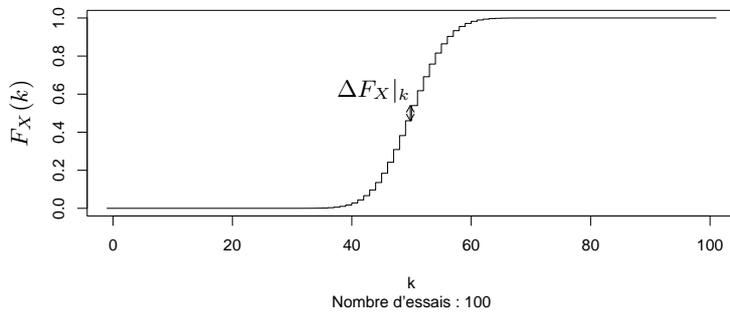
52

Fonction de répartition : v.a.d. vers v.a.c.

Fonction de probabilité,  $p_X(k) = P(\{X = k\})$



Fonction de répartition,  $F_X(k) = P(\{X \leq k\})$

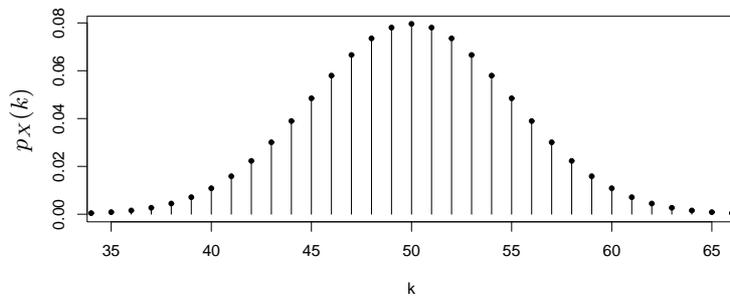


V.A.D.

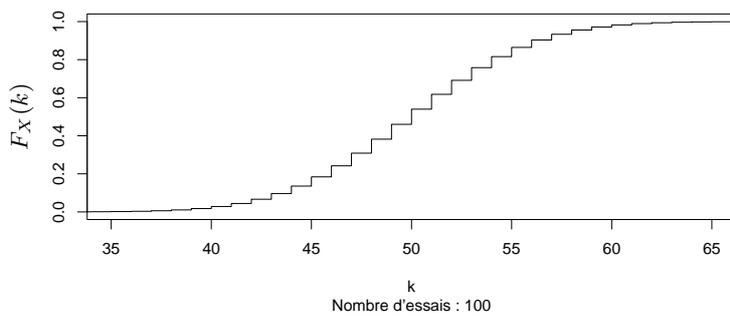
- ▼  $F_X(b) - F_X(a) = P(\{a < X \leq b\})$
- ▼  $F_X(k) - F_X(k^-) \triangleq \Delta F_X|_k = P(\{X = k\}) = p_X(k)$

Fonction de répartition : v.a.d. vers v.a.c.

Fonction de probabilité,  $p_X(k) = P(\{X = k\})$



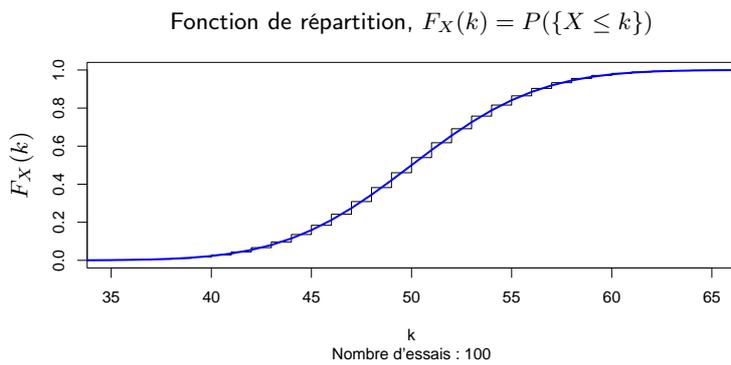
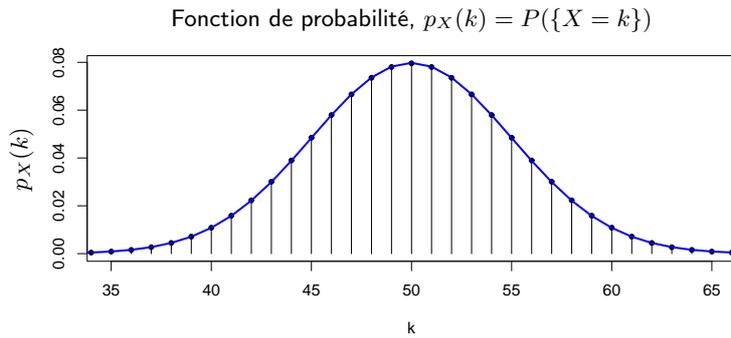
Fonction de répartition,  $F_X(k) = P(\{X \leq k\})$



V.A.D.

- ▼  $F_X(b) - F_X(a) = P(\{a < X \leq b\})$
- ▼  $F_X(k) - F_X(k^-) \triangleq \Delta F_X|_k = P(\{X = k\}) = p_X(k)$

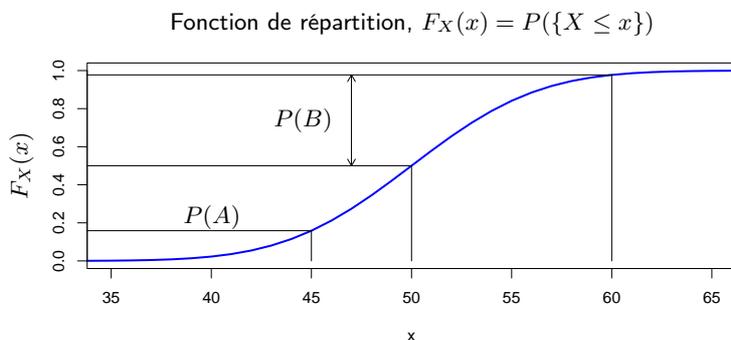
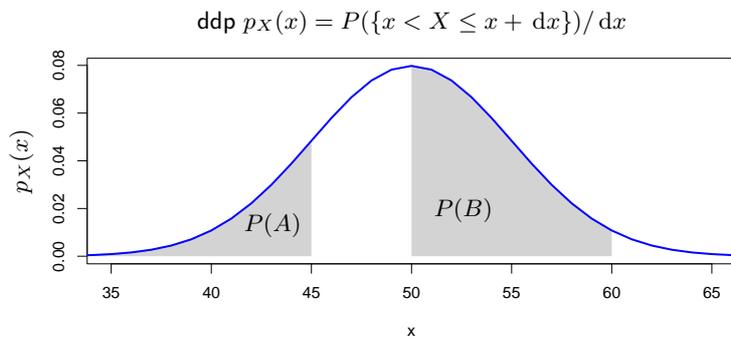
Fonction de répartition : v.a.d. vers v.a.c.



- V.A.D.
- ▼  $F_X(b) - F_X(a) = P(\{a < X \leq b\})$
  - ▼  $F_X(k) - F_X(k^-) \triangleq \Delta F_X|_k = P(\{X = k\}) = p_X(k)$
- V.A.C.
- ▼  $F_X(b) - F_X(a) = P(\{a < X \leq b\})$
  - ▼  $F_X(x + dx) - F_X(x) \triangleq dF_X = P(\{x < X \leq x + dx\})$
  - ▼  $\frac{dF_X}{dx} = \frac{P(\{x < X \leq x + dx\})}{dx} \triangleq p_X(x) \text{ ddp}$
  - ▼  $F_X(x) = \int_{-\infty}^x p_X(u) du$

55

Fonction de répartition : v.a.d. vers v.a.c.



- V.A.C.
- ▼  $F_X(b) - F_X(a) = P(\{a < X \leq b\})$
  - ▼  $F_X(x + dx) - F_X(x) \triangleq dF_X = P(\{x < X \leq x + dx\})$
  - ▼  $\frac{dF_X}{dx} = \frac{P(\{x < X \leq x + dx\})}{dx} \triangleq p_X(x) \text{ ddp}$
  - ▼  $F_X(x) = \int_{-\infty}^x p_X(u) du$
  - ▼  $A = \{X \leq 45\}$
  - ▼  $B = \{50 < X \leq 60\}$

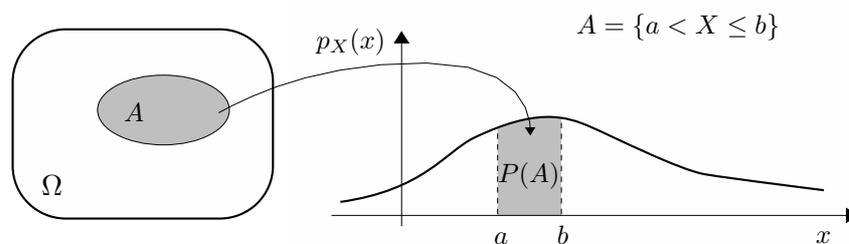
56

### Densité de probabilité



$$P(\{x < X \leq x + dx\}) = p_X(x) dx$$

$$P(\{a < X \leq b\}) = \int_a^b p_X(x) dx$$



- ▼  $p_X(x) \geq 0, \forall x$
- ▼  $P(\{X = x_0\}) = P(\{x_0 < X \leq x_0\}) = \int_{x_0}^{x_0} p_X(x) dx = 0$
- ▼ Normalisation :  
 $\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x) dx = P(\{-\infty < X < +\infty\}) = P(\Omega) = 1$

57

### Fonction de répartition

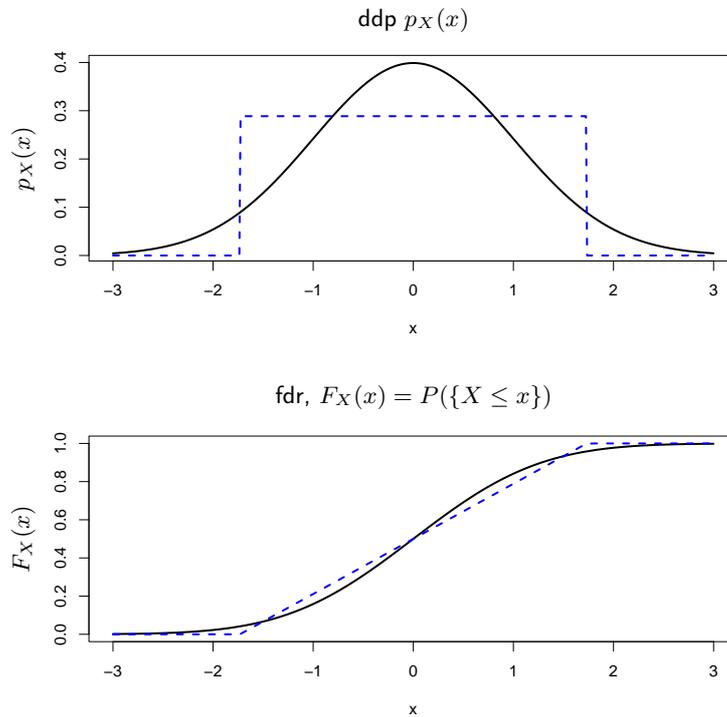


$$F_X(x) \triangleq P(\{X \leq x\}) = \int_{-\infty}^x p_X(u) du \quad p_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

- ▼ Propriétés :
  - ▶  $F_X(x)$  : définie sur  $\mathbb{R}$  ; continue (v.a.c.) / cont. à droite (v.a.d.)
  - ▶ Monotone croissante (au sens large) :  
 si  $x_1 < x_2$ ,  $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$
  - ▶  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$
  - ▶  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$
  - ▶  $F_X(x_2) - F_X(x_1) = P(\{x_1 < X \leq x_2\})$
  - ▶ v.a.d. :  $F_X(x_{(k)}) - F_X(x_{(k)}^-) = p_X(x_{(k)})$
  - ▶ v.a.c. :  $dF_X(x) = F_X(x + dx) - F_X(x) = P(x < X \leq x + dx)$
  - ▶  $\frac{dF_X(x)}{dx} = \frac{P(x < X \leq x + dx)}{dx} \triangleq p_X(x)$

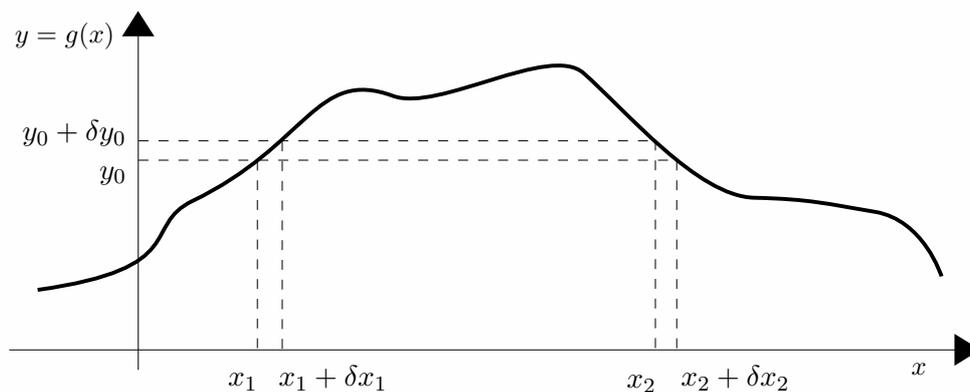
58

Exemple : v.a. uniforme et v.a. normale



59

Fonction d'une V.A.



$$\begin{aligned}
 \blacktriangledown P(\{y_0 < Y \leq y_0 + \delta y_0\}) &= p_Y(y_0) \cdot \delta y_0 \\
 &= \sum_{\{x_i | g(x_i) = y_0\}} P(\{x_i < X \leq x_i + \delta x_i\}) \\
 &= \sum_{\{x_i | g(x_i) = y_0\}} p_X(x_i) \cdot \delta x_i
 \end{aligned}$$

$$\blacktriangledown p_Y(y_0) = \sum_{\{x_i | g(x_i) = y_0\}} p_X(x_i) \frac{1}{\delta y_0 / \delta x_i} = \sum_{\{x_i | g(x_i) = y_0\}} \frac{p_X(x_i)}{|g'(x_i)|}$$

60

## Grandeurs statistiques

- ▼ Espérance

$$\mu_X = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_X(x) dx$$

- ▼ Espérance de  $g(X)$

$$\mu_{g(X)} = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) p_X(x) dx$$

- ▼ Variance

$$\text{var}[X] = \sigma_X^2 = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2$$

- ▼ n-ième moment :

$$E[X^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n p_X(x) dx$$

- ▼ n-ième moment centré :

$$E[(X - E[X])^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E[X])^n p_X(x) dx$$

61

## Fonction linéaire

- ▼

$$Y = aX + b$$

- ▼

$$E[Y] = aE[X] + b$$

$$\text{var}[Y] = a^2 \text{var}[X] \quad \sigma_Y = |a| \sigma_X$$

- ▼  $E[Y] = E[aX + b]$   
 $= \int_{-\infty}^{+\infty} (ax + b) p_X(x) dx$   
 $= a \int_{-\infty}^{+\infty} x p_X(x) dx + b \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x) dx$   
 $= aE[X] + b$

62

### Deux variables aléatoires

- ▼  $X, Y$  : V.A. associées à la même expérience aléatoire
- ▼ Densité de probabilité conjointe  $p_{XY}(x, y)$  :

▼

$$P(\{x < X \leq x + dx\} \cap \{y < Y \leq y + dy\}) = p_{XY}(x, y) dx dy$$

$$P(\{a < X \leq b\} \cap \{c < Y \leq d\}) = \int_c^d \int_a^b p_{XY}(x, y) dx dy$$

- ▼ Densités de probabilité marginales :  
 $p_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{XY}(x, y) dy$ ,  $p_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{XY}(x, y) dx$
- ▼  $Z = g(X, Y)$   
 $E[Z] = E[g(X, Y)] = \int \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) p_{XY}(x, y) dx dy$   
 $E[aX + bY + c] = aE[X] + bE[Y] + c$
- ▼ Généralisation à  $n$  variables aléatoires

63

### V.A. Conditionnées

- ▼ V.A. conditionnée par un événement  $A, P(A) \neq 0$ 
  - ▶ ddp  $p_{X|A}(x)$  :  $P(\{x < X \leq x + dx\} | A) = p_{X|A}(x) dx$
  - ▶ cas spécial : si  $A = \{X \in C\}$  :

$$p_{X|\{X \in C\}}(x) = \begin{cases} \frac{p_X(x)}{P(\{X \in C\})} & x \in C \\ 0 & x \notin C \end{cases}$$

- ▼ V.A. conditionnée par une V.A.

▶

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{XY}(x, y)}{p_Y(y)}, \quad \forall y \mid p_Y(y) \neq 0$$

- ▶ Approche séquentielle :
- ▶  $p_{XY}(x, y) = p_X(x)p_{Y|X}(y|x) = p_Y(y)p_{X|Y}(x|y)$

64

### Espérance conditionnelle

- ▼  $E[X|\{Y = y\}] = \int x p_{X|Y}(x|y) dx$
- ▼  $E[X] = \int E[X|\{Y = y\}] p_Y(y) dy$  (théorème d'espérance totale)
- ▼  $E[g(X)|\{Y = y\}] = \int g(x) p_{X|Y}(x|y) dx$
- ▼  $E[g(X)] = \int E[g(X)|\{Y = y\}] p_Y(y) dy$
- ▼  $E[g(X, Y)|\{Y = y\}] = \int g(x, y) p_{X|Y}(x|y) dx$
- ▼  $E[g(X, Y)] = \int E[g(X, Y)|\{Y = y\}] p_Y(y) dy$

65

### Indépendance

- ▼ Entre deux V.A.  $X$  et  $Y$  :
  - ▼  $p_{XY}(x, y) = p_X(x)p_Y(y)$ ,  $\forall x, y$ 
    - ▶  $p_{X|Y}(x, y) = p_X(x)$ ,  $\forall x$  et  $\forall y, p_Y(y) \neq 0$
    - ▶  $P(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}) = P(\{X \in A\}) \cdot P(\{Y \in B\})$
    - ▶  $E[XY] = E[X]E[Y] \Rightarrow \text{cov}[X, Y] = 0$  : v.a. non corrélées
    - ▶  $E[g(X)h(Y)] = E[g(X)]E[h(Y)]$
    - ▶  $\text{var}[X + Y] = \text{var}[X] + \text{var}[Y]$
- ▼ Entre  $n$  V.A.  $X_1, \dots, X_n$
- ▼  $p_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) = p_{X_1}(x_1) \dots p_{X_n}(x_n)$ ,  $\forall x_1, \dots, x_n$ 
  - ▶  $E[X_1 \dots X_n] = E[X_1] \dots E[X_n]$
  - ▶  $\text{var}[X_1 + \dots + X_n] = \text{var}[X_1] + \dots + \text{var}[X_n]$

66

## Statistique Descriptive

67

### Quelques définitions

- ▼ Population statistique : ensemble d'individus à étudier
  - ▶ finie
  - ▶ infinie
- ▼ Individu / unité statistique
- ▼ Caractère / variable statistique
  - ▶ qualitatif
  - ▶ quantitatif (discret / continu)
- ▼ Échantillon : sous-ensemble de la population
- ▼ Fréquences
  - ▶ absolues (effectifs)
  - ▶ relatives (proportions)

68

### Paramètres statistiques d'un échantillon

- ▼ Mesures de tendance centrale (position)
  - ▶ Moyenne :  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$  (**mean**)
  - ▶ Médiane : partage les valeurs en deux parties (**median**)
  - ▶ Quantiles : partagent les valeurs en  $k$  parties (**quantile**)
  - ▶ Quartiles ( $k = 4$ ) :  $Q_1$ ,  $Q_2$  (médiane),  $Q_3$  (**summary**)
  - ▶ Mode(s) : la (les) valeur(s) avec la plus grande fréquence
- ▼ Mesures de dispersion
  - ▶ Étendue :  $x_{(n)} - x_{(1)}$  (**max - min**)
  - ▶ Intervalle interquartile (IQR) :  $Q_3 - Q_1$  (**IRQ**)
  - ▶ Variance de l'échantillon : (**var**)  
$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{n \sum_{i=1}^n (x_i)^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}{n(n-1)}$$
 (attn. si  $s/\bar{x} \ll 1$ )
  - ▶ Écart-type de l'échantillon :  $s$  (**sd**)
  - ▶ Écart absolu médian par rapport à la médiane (**mad**)
  - ▶ Coefficient de variation :  $s/\bar{x}$

69

**Exemple : notes TP Élec 2006-2007**



- ▼ Population : étudiants Élec4, 2006-2007
- ▼ Caractère étudié :
  1. option (qualitatif)
  2. moyenne tp (quantitatif)
  3. contrôle final (quantitatif)
- ▼ Échantillon : 30 étudiants

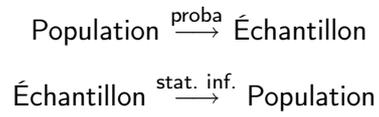
70

## Statistique Inférentielle : introduction

71

### Objectif

Obtenir, à partir de mesures sur une *partie* de la population (échantillon), des informations (de caractère *probabiliste*) sur la *totalité* de celle-ci.



72

### Échantillonnage : définition

Choisir *au hasard*  $n$  individus de la population afin d'étudier un ou plusieurs caractères.

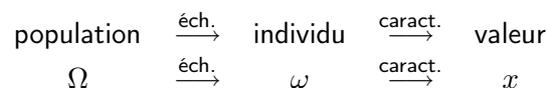
- ▼ Deux types d'échantillonnage :
  1. *avec* remplacement de l'individu choisi  
traitement théorique plus simple
  2. *sans* remplacement : échantillonnage exhaustif  
procédure naturelle ou obligatoire (contrôle destructif)
- ▼ Population de taille finie + éch. non exhaustif  
⇒ population de taille infinie
- ▼ Éch. exhaustif de taille  $n$  + Population de taille  $N \gg n$   
⇒ échantillonnage non exhaustif

73

### Une expérience aléatoire

Choisir *au hasard* un individu de la population. Obtenir une valeur du caractère étudié.

- ▼ Valeurs possibles du caractère : celles présentes dans la population
  - ▼ Probabilité associée : fréquence relative des individus possédant cette valeur dans la population
- À condition que chaque individu ait la même probabilité d'être choisi !



- ▼ Expérience aléatoire : choisir au hasard un individu de la population
- ▼ Variable aléatoire  $X$  associée : le caractère étudié (quantitatif / qualitatif)
- ▼ Fonction/densité de probabilité  $p_X(x)$  : dépend de la population

74

## Échantillon : ensemble de variables aléatoires

- ▼ « Population  $p_X(x)$  » : génère des v.a.
- ▼ Observation d'un caractère d'un individu : v.a.  $X$ , loi  $p_X(x)$
- ▼ Échantillonnage de taille  $n$  : la même expérience aléatoire répétée  $n$  fois!  
*ensemble* de  $n$  v.a.  $X_i$  ( $i = 1, \dots, n$ )
- ▼ Échantillonnage *aléatoire* (non biaisé) :  $n$  v.a. *identiques* et *indépendantes* (iid)

$$p_{X_1}(x) = p_{X_2}(x) = \dots = p_{X_n}(x) = p_X(x)$$

$$p_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = p_X(x_1) p_X(x_2) \dots p_X(x_n)$$

c-à-d : *avec* remplacement + *même probabilité* de choisir chaque individu

- ▼ **Statistiques** : des v.a., fonctions des  $X_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) d'un échantillon  
(théorie d'échantillonnage : quelles valeurs et quelles probabilités?)
- ▼ Obtenir un échantillon, de taille  $n$  :  
ensemble de  $n$  valeurs  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ )  $\rightarrow$  Statistique Descriptive!
- ▼ Expérience mentale : obtenir une infinité d'échantillons

75

## Paramètres statistiques d'un échantillon

- ▼ Mesures de tendance centrale (position)
  - ▶ Moyenne :  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$
  - ▶ Médiane : partage les valeurs en deux parties
  - ▶ Quantiles : partagent les valeurs en  $k$  parties
  - ▶ Quartiles ( $k = 4$ ) :  $Q_1, Q_2$  (médiane),  $Q_3$
  - ▶ Déciles ( $k = 9$ ) :  $D_1, D_2, \dots, D_5$  (médiane),  $\dots, D_9$
- ▼ Statistiques d'ordre :  $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$  où  $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$
- ▼ Mesures de dispersion
  - ▶ Étendue :  $X_{(n)} - X_{(1)}$
  - ▶ Intervalle interquartile (IQR) :  $Q_3 - Q_1$
  - ▶ Variance de l'échantillon :  $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{n \sum_{i=1}^n (X_i)^2 - (\sum_{i=1}^n X_i)^2}{n(n-1)}$  (attn. si  $s/\bar{x} \ll 1$ )
  - ▶ Écart-type de l'échantillon :  $S$
  - ▶ Écart absolu médian par rapport à la médiane
  - ▶ Coefficient de variation :  $S/\bar{X}$

76

### Cas spécial : caractère qualitatif (les proportions)

- ▼ Étudier un caractère qualitatif à  $M$  modalités (réponses possibles)
  - ▶ Population :  $M$  « types » d'individus ;  $M$  fréquences relatives  $\pi_j$
  - ▶ Échantillonnage aléatoire d'un individu :  
v.a.d.  $X$  à  $M$  valeurs ; probabilités associées  $\pi_j$  ( $j = 1, \dots, M$ )
- ▼ Autre approche (cas par cas) :
  - ▶ Pour chaque modalité du caractère, étudier le nouveau caractère « l'individu présente la modalité  $j$  du caractère initial »
  - ▶ Réponses possibles : « oui » / « non »
  - ▶ Population : 2 « types » d'individus ; fréquences relatives  $\pi_j, 1 - \pi_j$
  - ▶ Échantillonnage aléatoire d'un individu :  
v.a.d.  $X$  à 2 valeurs ( $1 = \text{« oui »}, 0 = \text{« non »}$ ) ;  
probabilités associées  $\pi_j, 1 - \pi_j$
  - ▶  $X$  : v.a.d. de Bernoulli, de paramètre  $\pi_j$
  - ▶ Échantillon de taille  $n$  :  
Moyenne  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \triangleq \hat{P}$  proportion de « oui » dans l'échantillon

77

### Statistique inférentielle : feuille de route

Théorie d'échantillonnage : Population  $\longrightarrow$  Échantillon  
Statistique inférentielle : Échantillon  $\longrightarrow$  Population

Échantillon		Population $p_X(x)$
v.a.	valeur	paramètre
une population		
$\bar{X}$	$m = \bar{x}$	$\mu_X = E[X]$
$S^2$	$s^2$	$\sigma_X^2 = \text{var}[X]$
$\hat{P}$	$\hat{p}$	$\pi$
deux populations		
$\bar{X}_2 - \bar{X}_1$	$m_2 - m_1 = \bar{x}_2 - \bar{x}_1$	$\mu_2 - \mu_1$
$S_2^2/S_1^2$	$(s_2/s_1)^2$	$(\sigma_2/\sigma_1)^2$
$\hat{P}_2 - \hat{P}_1$	$\hat{p}_2 - \hat{p}_1$	$\pi_2 - \pi_1$

- ▼ Estimer les paramètres de la population
- ▼ Calculer des intervalles de confiance
- ▼ Formuler des hypothèses et les tester

78

### Distribution uniforme



$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



$$E[X] = \frac{1}{2}(a + b)$$



$$\text{var}[X] = \sigma_X^2 = \frac{1}{12}(a - b)^2$$



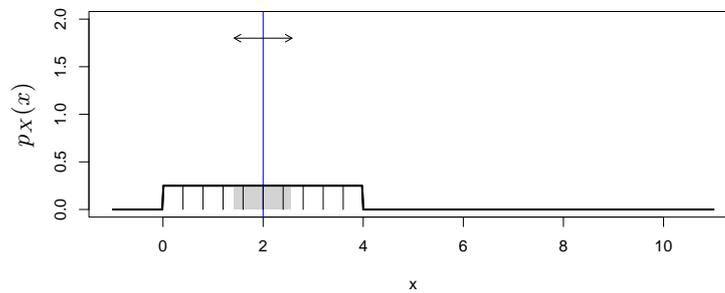
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

79

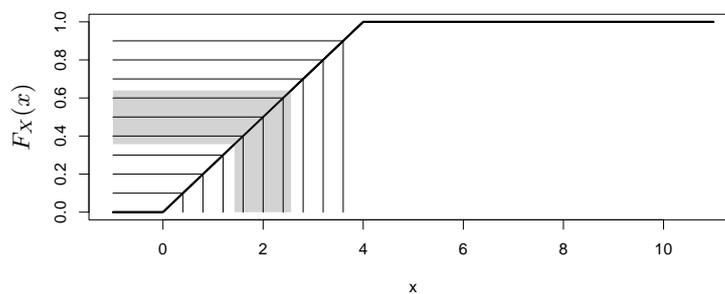
### Distribution uniforme



ddp  $p_X(x) = P(\{x < X \leq x + dx\}) / dx$



fdr  $F_X(x) = P(\{X \leq x\})$



80

### Distribution normale (gaussienne)



$$N(\mu_X, \sigma_X) : p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu_X}{\sigma_X} \right)^2 \right]$$



$$E[X] = \mu_X$$



$$\text{var}[X] = \sigma_X^2$$



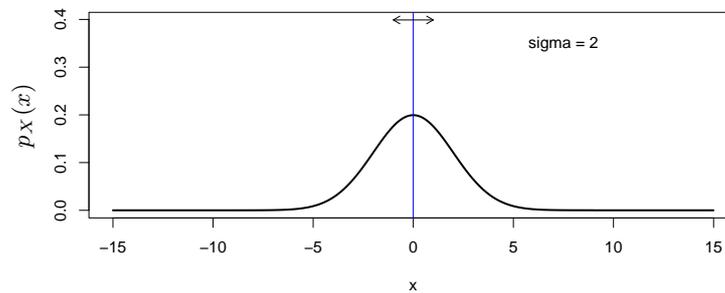
$$F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \int_{-\infty}^x \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x' - \mu_X}{\sigma_X} \right)^2 \right] dx'$$

81

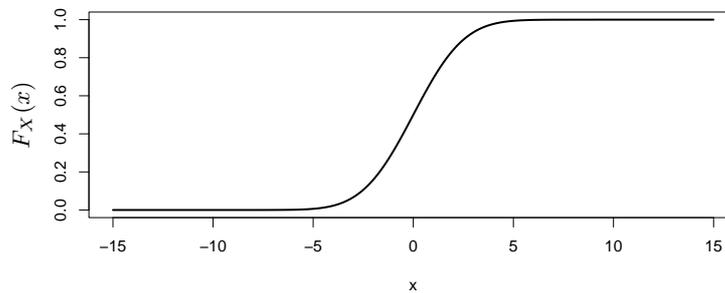
### Distribution normale



$$\text{ddp } p_X(x) = P(\{x < X \leq x + dx\}) / dx$$



$$\text{fdr } F_X(x) = P(\{X \leq x\})$$



82

**Distribution normale standard (centrée réduite)**

▼

$$\begin{aligned}
 X = N(\mu_X, \sigma_X) : P(\{X \leq x = \mu_X + z\sigma_X\}) &= F_X(x = \mu_X + z\sigma_X) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \int_{-\infty}^{\mu_X + z\sigma_X} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right)^2\right] dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) du = P(\{Z \leq z\}) = F_Z\left(z = \frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right) \triangleq 1 - Q(z)
 \end{aligned}$$

▼

$$\boxed{Z = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}} : \text{normale standard (centrée réduite) } N(0, 1)$$

▼  $z$  : exprime l'écart entre  $x$  et  $\mu_X$  en termes (unité de mesure) de  $\sigma_X$   
 toujours **sans unité**!

83

**Distribution normale standard (centrée réduite)**

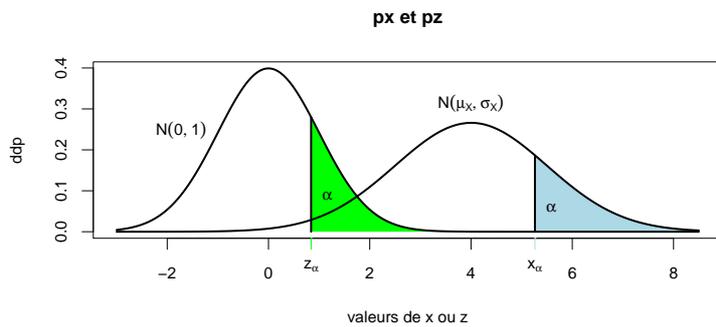
- ▼ v.a. centrée réduite : fonction linéaire d'une autre v.a.
- ▼ notion générale (pas seulement pour la normale!)

	de $X$ vers $Z$		de $Z$ vers $X$	
v.a.	$X$	$Z = (X - \mu_X)/\sigma_X$	$Z$	$X = \mu_X + Z\sigma_X$
valeur	$x$	$z = (x - \mu_X)/\sigma_X$	$z$	$x = \mu_X + z\sigma_X$
esp.	$\mu_X$	0	0	$\mu_X$
var.	$\sigma_X^2$	1	1	$\sigma_X^2$
ddp	$p_X(x)$	$\sigma_X p_X(\mu_X + z\sigma_X)$	$p_Z(z)$	$\frac{1}{\sigma_X} p_Z\left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right)$
fdr	$F_X(x) = F_Z\left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right)$		$F_Z(z) = F_X(\mu_X + z\sigma_X)$	

▼ On peut calculer des **probabilités** aussi bien en  $X$  qu'en  $Z$ !

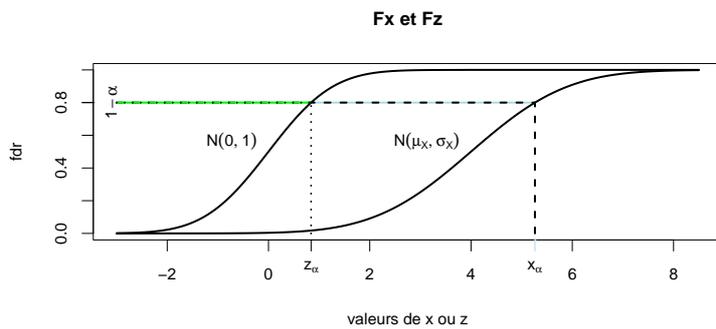
84

### Distribution normale standard (centrée réduite)



- ▼  $X : N(4, 1.5)$
- ▼  $Z : N(0, 1)$
- ▼  $X = \mu_X + Z\sigma_X$
- ▼ « Valeur critique »  $x_\alpha$  :  
 $P(\{X > x_\alpha\}) = \alpha$
- ▼  $F_X(x_\alpha) = 1 - \alpha$
- ▼ « Valeur critique »  $z_\alpha$  :  
 $P(\{Z > z_\alpha\}) = \alpha$
- ▼  $F_Z(z_\alpha) = 1 - \alpha$

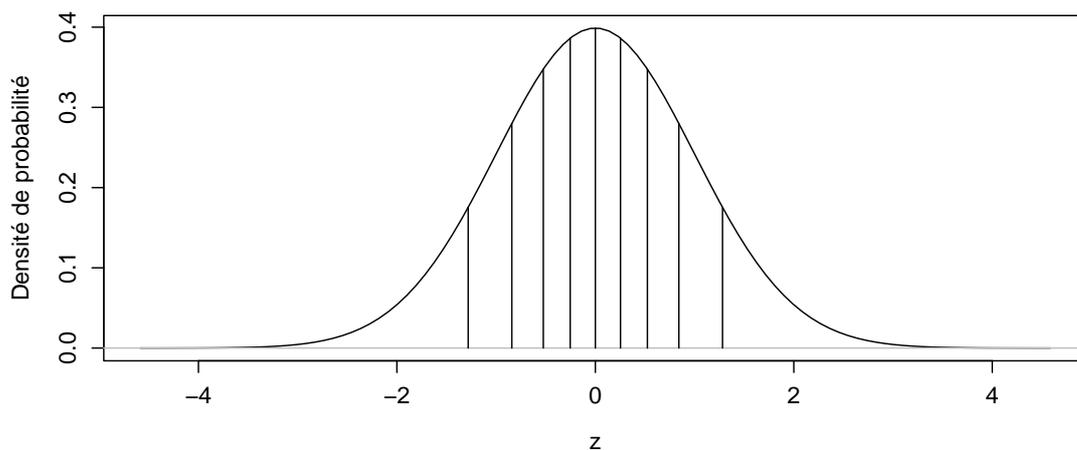
$$x_\alpha = \mu_X + z_\alpha \sigma_X$$



85

### Distribution normale standard (centrée réduite)

Distribution Normale :  $\mu = 0, \sigma = 1$



86

### Propriétés de la loi normale

1. Deux gaussiennes décorréllées sont indépendantes (l'exception !)

▼  $X_1, X_2$  conjointement normales : ddp conjointe  $p_{X_1 X_2}(x_1, x_2)$  :

$$p_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left[ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left( \frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1} \right)^2 - \right. \\ \left. -2\rho \frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{1}{2(1-\rho^2)} \left( \frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2} \right)^2 \right]$$

▼ ddp marginales :  $X_1 = N(\mu_1, \sigma_1)$  et  $X_2 = N(\mu_2, \sigma_2)$

▼ coefficient de corrélation linéaire :  $\rho$

▼  $\rho = 0 \implies p_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2)$

2. La somme de gaussiennes indépendantes est une gaussienne

▼  $X_1, X_2, \dots, X_n$  normales  $N(\mu_i, \sigma_i)$ , indépendantes

▼  $X = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n = \sum_{i=1}^n a_i X_i$

▼  $\mu_X = a_1 \mu_1 + a_2 \mu_2 + \dots + a_n \mu_n = \sum_{i=1}^n a_i \mu_i$

▼  $\sigma_X^2 \stackrel{\text{ind}}{=} a_1^2 \sigma_1^2 + a_2^2 \sigma_2^2 + \dots + a_n^2 \sigma_n^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2$

▼  $X : N(\mu_X, \sigma_X)$

87

### Somme de deux v.a. indépendantes

▼  $X_1, X_2$  : v.a. indépendantes (pas nécessairement identiques)

▼  $X = X_1 + X_2$  : nouvelle v.a.

▼ Comment trouver  $p_X(x)$  à partir de  $p_{X_1}(x_1)$  et  $p_{X_2}(x_2)$  ?

1. Cas v.a.d. :

$$p_X(x) = P(\{X = x\}) \stackrel{\text{prob. tot.}}{=} \sum_{x_1} P(\{X_1 = x_1\})P(\{X_2 = x - x_1 | X_1 = x_1\}) \\ \stackrel{\text{ind}}{=} \sum_{x_1} P(\{X_1 = x_1\})P(\{X_2 = x - x_1\}) \\ = \sum_{x_1} p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x - x_1) = p_{X_1} \star p_{X_2}$$

2. Cas v.a.c. :

$p_X(x)$  = sans démonstration

$$= \int_{x'} p_{X_1}(x')p_{X_2}(x - x') dx' = p_{X_1} \star p_{X_2}$$

$$X = X_1 + X_2 \stackrel{\text{ind}}{\implies} p_X = p_{X_1} \star p_{X_2}$$

88

**[Théorème limite central]**

- ▼  $X_1, X_2, \dots, X_n$  : série de v.a. indépendantes
- ▼  $p_{X_1}(x) = \dots = p_{X_n}(x) = p_X(x)$  (même distribution)
- ▼  $E[X_1] = \dots = E[X_n] = \mu_X$ ,  $\sigma_{X_1} = \dots = \sigma_{X_n} = \sigma_X$
- ▼

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n, E[S_n] = n\mu_X, \sigma_{S_n}^2 \stackrel{\text{ind}}{=} n\sigma_X^2$$

$$\boxed{Z_n = \frac{S_n - \mu_{S_n}}{\sigma_{S_n}}} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - n\mu_X}{\sqrt{n}\sigma_X}, \boxed{E[Z_n] = 0}, \boxed{\sigma_{Z_n}^2 = 1}$$

- ▼ TLC :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\{Z_n \leq z\}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) du$$

- ▼ TLC :  $\boxed{n \rightarrow \infty : Z_n \rightarrow N(0,1)}$ ,  $S_n \rightarrow N(n\mu_X, \sqrt{n}\sigma_X)$ ,  $\frac{S_n}{n} \rightarrow N\left(\mu_X, \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}\right)$

## Théorie d'échantillonnage – un échantillon

90

### Distribution de la moyenne

- ▼ Échantillon aléatoire de taille  $n$  ; moyenne  $\bar{X}$
- ▼ Population normale  $N(\mu, \sigma)$ 
  - ▶  $\bar{X}$  : normale (combinaison linéaire de v.a. normales)
  - ▶  $\mu_{\bar{X}} = \mu$
  - ▶  $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  ( $\sigma$  connu)
- ▼ Population non normale ( $\sigma$  connu)
  - ▶  $n > 30$  :  $\bar{X} = N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$  (tlc)
  - ▶  $n < 30$  :  $\bar{X} = N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$  si  $p_X(x)$  « presque » normale
- ▼ Presque toujours :  $\bar{X} = N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$ 
  - ▶  $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \rightarrow N(0, 1)$
  - ▶  $P(Z > z_\alpha) = \alpha$  (définition de  $z_\alpha$  « valeur critique »)
  - ▶  $P(Z < -z_\alpha) = \alpha$  (symétrie de la normale)

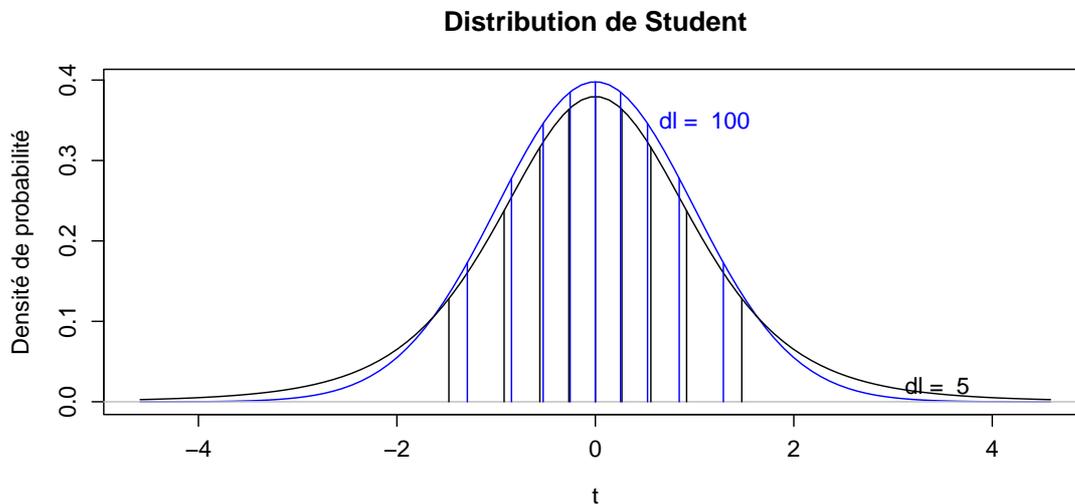
91

### Distribution de la moyenne ; $\sigma_X$ inconnue

- ▼  $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \rightarrow N(0, 1)$
- ▼  $T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} = \frac{(\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})}{\sqrt{S^2/\sigma^2}} = \frac{Z}{\sqrt{V/(n-1)}} = \frac{Z}{\sqrt{V/\nu}}$
- ▼  $V = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$  : loi du  $\chi^2$  à  $\nu = n - 1$  d.l.
- ▼ Condition : population normale
- ▼  $Z, V$  indépendantes
- ▼  $T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$  : loi de Student à  $\nu = n - 1$  d.l.
- ▼  $E[T] = 0$
- ▼  $\sigma_T^2 = \frac{\nu}{\nu-2} > 1$  (non définie pour  $\nu \leq 2$ )
- ▼  $P(T > t_\alpha) = \alpha$  (définition de  $t_\alpha$ , valeur critique)
- ▼  $P(T < -t_\alpha) = \alpha$  (symétrie de la loi  $t$ )
- ▼  $n \geq 30$  :  $s \rightarrow \sigma$  donc  $T \rightarrow Z$
- ▼ "Student" : W.S. Gosset, 1908

92

### Distribution de Student



$$E[T] = 0 \quad , \quad \sigma_T^2 = \frac{\nu}{\nu-2} > 1 \quad (\text{non définie pour } \nu \leq 2)$$

93

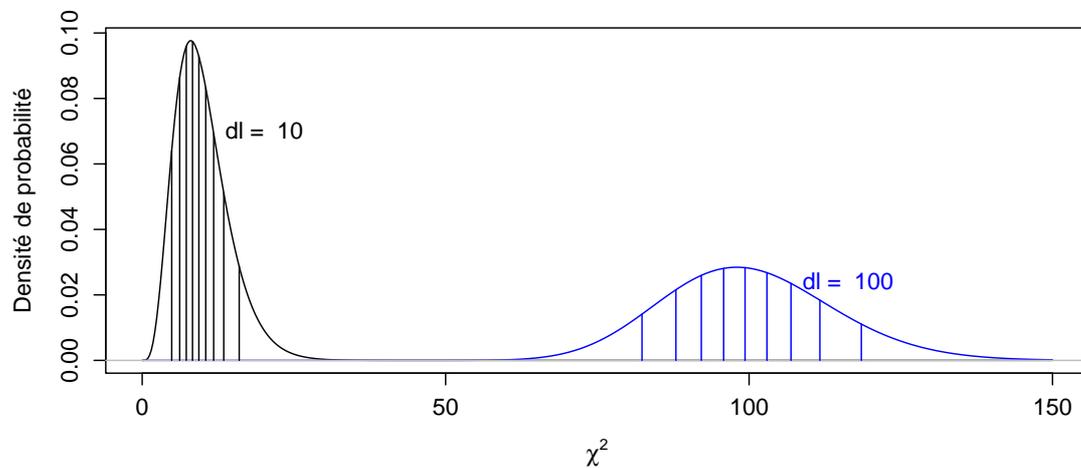
### Distribution de la variance

- ▼ Échantillon aléatoire de taille  $n$  ; variance  $S^2$ 
  - ▶ Condition : population normale  $N(\mu, \sigma)$
  - ▶  $X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$
  - ▶  $X^2$  : v.a. loi du  $\chi^2$  à  $\nu = n - 1$  degrés de liberté (d.l.)
  - ▶  $X^2 > 0$
  - ▶  $E[X^2] = n - 1 \rightarrow E[S^2] = \sigma^2$
  - ▶  $\sigma_{X^2}^2 = 2(n-1) \rightarrow \sigma_{S^2}^2 = 2\sigma^4/(n-1)$
  - ▶  $P(X^2 > \chi_\alpha^2(\nu)) = \alpha$  (définition de  $\chi_\alpha^2(\nu)$ , valeur critique)

94

### Distribution du $\chi^2$

#### Distribution du Khi-deux



$$E[X^2] = n - 1 \quad , \quad \sigma_{X^2}^2 = 2(n - 1)$$

95

## Distribution de la proportion

### ▼ Population

- ▶  $\pi$  : proportion d'individus possédant un caractère qualitatif ( $\pi \neq 3.14!$ )

### ▼ Échantillon aléatoire de taille $n$

- ▶  $n$  v.a.  $X_i$  ;  $x_i \in \{0, 1\}$  : Bernoulli indépendantes, de paramètre  $\pi$
- ▶  $\sum_{i=1}^n X_i$  : nombre d'individus possédant le caractère (fréquence)
- ▶  $\hat{P} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  : proportion d'individus (fréquence relative)

### ▼ Conditions :

- ▶  $n > 30$  (grand échantillon : théorème limite central)
- ▶  $n\hat{p} \geq 5$  (fréquence de présence du caractère)
- ▶  $n(1 - \hat{p}) = n - n\hat{p} \geq 5$  (fréquence d'absence du caractère)
- ▶ ni  $\hat{p} \approx 0$ , ni  $\hat{p} \approx 1$

### ▼ Distribution :

- ▶  $\mu_{\hat{P}} = (n\mu_X)/n = \mu_X = \pi$  ,  $\sigma_{\hat{P}}^2 \stackrel{\text{ind}}{=} (n\sigma_X^2)/n^2 = \pi(1 - \pi)/n$
- ▶  $\hat{P} : \text{normale } N\left(\pi, \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}\right) \rightarrow Z : \text{normale } N(0, 1)$

## Théorie d'échantillonnage – deux échantillons

97

### Distribution de la différence des moyennes

- ▼ Conditions :  $\sigma_1, \sigma_2$  connus et
  - ▶ populations normales  $N(\mu_1, \sigma_1), N(\mu_2, \sigma_2)$  ou
  - ▶  $n_1 > 30$  et  $n_2 > 30$ , ou
  - ▶ populations « presque » normales
- ▼ Échantillons aléatoires et indépendants de tailles  $n_1, n_2$ ; moyennes  $\bar{X}_1, \bar{X}_2$ 
  - ▶  $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$  : normale
  - ▶  $\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \mu_{\bar{X}_1} - \mu_{\bar{X}_2} = \mu_1 - \mu_2$
  - ▶  $\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}^2 \stackrel{\text{ind}}{=} \sigma_{\bar{X}_1}^2 + \sigma_{\bar{X}_2}^2 = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$
- ▼ D'autres cas à examiner ultérieurement...

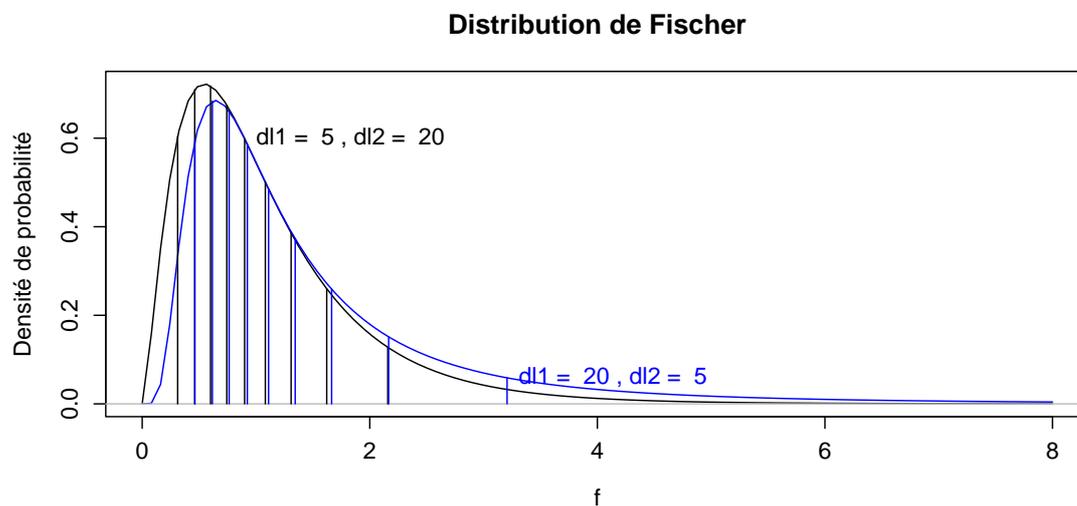
98

### Distribution du rapport des variances

- ▼ Échantillons aléatoires et indépendants de tailles  $n_1, n_2$
- ▼ Provenant de populations normales de variances  $\sigma_1^2, \sigma_2^2$
- ▼ Variances des échantillons :  $S_1^2, S_2^2$
- ▼ 
$$F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{V_1/\nu_1}{V_2/\nu_2}$$
- ▼  $V_i = \frac{(n_i-1)S_i^2}{\sigma_i^2}$  : v.a. indépendantes, loi du  $\chi^2$  à  $\nu_i = n_i - 1$  d.l.
- ▼  $F$  : loi de Fisher (1924) - Snedecor (1934) avec  $\nu_1$  et  $\nu_2$  d.l.
- ▼  $F \geq 0$
- ▼  $E[F] = \frac{\nu_2}{\nu_2-2}$  ( $\nu_2 > 2$ )
- ▼  $\sigma_F^2 = \frac{\nu_2^2(2\nu_1+2\nu_2-4)}{\nu_1(\nu_2-2)^2(\nu_2-4)}$  ( $\nu_2 > 4$ )
- ▼  $P(F > f_\alpha(\nu_1, \nu_2)) = \alpha$  (définition de  $f_\alpha(\nu_1, \nu_2)$ , v.c.)
- ▼ 
$$f_\alpha(\nu_1, \nu_2) = \frac{1}{f_{1-\alpha}(\nu_2, \nu_1)}$$
 (propriété de la loi  $F$ )

99

### Distribution de Fisher



$$f_\alpha(\nu_1, \nu_2) = 1/f_{1-\alpha}(\nu_2, \nu_1)$$

100

## Estimation – intervalles de confiance

101

### Définitions

- ▼ Estimation ponctuelle
  - ▶ Paramètre à estimer :  $\theta$
  - ▶ Estimateur : v.a.  $\hat{\Theta}$
  - ▶ Estimateur non biaisé :  $E[\hat{\Theta}] = \theta$
  - ▶ Biais =  $E[\hat{\Theta}] - \theta$
  - ▶ Estimateur efficace : sans biais ; de faible variance
  - ▶ Estimateur efficace : minimiser l'erreur quadratique moyenne
 
$$E[(\hat{\Theta} - \theta)^2] = \sigma_{\hat{\Theta}}^2 + (\text{biais})^2$$
  - ▶ Estimateur convergent :  $n \rightarrow \infty$  :  $E[\hat{\Theta}] = \theta$  et  $\text{var}[\hat{\Theta}] = 0$
- ▼ Estimation par intervalle de confiance
  - ▶ v.a.  $\hat{\Theta}_L, \hat{\Theta}_H$  : estimateurs ponctuels
  - ▶  $P(\hat{\Theta}_L < \theta < \hat{\Theta}_H) = 1 - \alpha$
  - ▶  $\boxed{\hat{\theta}_L < \theta < \hat{\theta}_H}$  : intervalle de confiance
  - ▶  $1 - \alpha$  : niveau de confiance

102

### Estimation de la moyenne (1/3)

- ▼ Variance  $\sigma^2$  connue
- ▼  $\bar{X}$  : normale  $N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$
- ▼  $Z = (\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$  : normale  $N(0, 1)$
- ▼  $\bar{X}$  estimateur non biaisé et convergent de  $\mu$
- ▼  $P(Z > z_{\alpha/2}) = \alpha/2$  (définition de  $z_{\alpha/2}$ )
- ▼  $P(Z < -z_{\alpha/2}) = \alpha/2$  (symétrie de la normale)
- ▼  $P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$
- ▼  $P(-z_{\alpha/2} < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$
- ▼  $P(-z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} - \mu < z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$
- ▼  $P(\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$
- ▼  $\hat{\Theta}_L = \bar{X} - z_{\alpha/2} \sigma_{\bar{X}}$ ,  $\hat{\Theta}_H = \bar{X} + z_{\alpha/2} \sigma_{\bar{X}}$
- ▼  $1 - \alpha = 0.95$ ,  $z_{\alpha/2} = \text{qnorm}(0.025, \text{mean}=0, \text{sd}=1, \text{lower.tail}=\text{FALSE}) = 1.96$
- ▼  $1 - \alpha = 0.99$ ,  $z_{\alpha/2} = \text{qnorm}(0.005, \text{mean}=0, \text{sd}=1, \text{lower.tail}=\text{FALSE}) = 2.56$

103

### Estimation de la moyenne (2/3) : taille de l'échantillon

- ▼  $P(-z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} - \mu < z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$
- ▼  $P(|\bar{X} - \mu| < z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$
- ▼  $e = |\bar{X} - \mu|$  : erreur
- ▼  $e_{\max} = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  : marge d'erreur à  $1 - \alpha$
- ▼  $n_{\min} = \left( \frac{z_{\alpha/2} \sigma}{e_{\max}} \right)^2$  : taille d'échantillon minimale
- ▼  $\bar{X} - e_{\max} < \mu < \bar{X} + e_{\max}$  à  $1 - \alpha$
- ▼ Cas particulier : échantillonnage d'une population finie, sans remplacement
  - ▶ Population de taille  $N$
  - ▶  $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \stackrel{N \gg 1}{\approx} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{1 - \frac{n}{N}}$
  - ▶  $n_{\min} = \frac{N z_{\alpha/2}^2 \sigma^2}{N e_{\max}^2 + z_{\alpha/2}^2 \sigma^2}$  : taille d'échantillon minimale

104

### Estimation de la moyenne (3/3)

- ▼ Variance  $\sigma^2$  inconnue
- ▼ Population normale
- ▼  $T = (\bar{X} - \mu)/(S/\sqrt{n})$  : Student à  $n - 1$  d.l.
- ▼  $P(T > t_{\alpha/2}) = \alpha/2$  (définition de  $t_{\alpha/2}$ )
- ▼  $P(T < -t_{\alpha/2}) = \alpha/2$  (symétrie de la loi t)
- ▼  $P(-t_{\alpha/2} < T < t_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$
- ▼  $P(-t_{\alpha/2} < \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} < t_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$
- ▼  $P(-t_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} < \bar{X} - \mu < t_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$
- ▼  $P(\bar{X} - t_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$
- ▼  $\hat{\theta}_L = \bar{X} - t_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}$ ,  $\hat{\theta}_H = \bar{X} + t_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}$
- ▼  $1 - \alpha = 0.95$ ,  $t_{\alpha/2} = \text{qt}(0.025, \text{df}=29, \text{lower.tail}=\text{FALSE}) = 2.05$
- ▼  $1 - \alpha = 0.99$ ,  $t_{\alpha/2} = \text{qt}(0.005, \text{df}=29, \text{lower.tail}=\text{FALSE}) = 2.76$
- ▼ Rappel :  $n \geq 30$ ,  $T \rightarrow Z$
- ▼  $T$  : petits échantillons !

105

### Estimation de la variance (un échantillon)

- ▼ Condition : population normale  $N(\mu, \sigma)$
- ▼  $X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$
- ▼  $X^2$  : v.a. loi du  $\chi^2$  à  $\nu = n - 1$  degrés de liberté (d.l.)
- ▼  $P(\chi_{1-\alpha/2}^2 < X^2 < \chi_{\alpha/2}^2) = 1 - \alpha$
- ▼  $P\left(\chi_{1-\alpha/2}^2 < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi_{\alpha/2}^2\right) = 1 - \alpha$
- ▼  $P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}^2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2}\right) = 1 - \alpha$
- ▼  $P\left(\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}^2}} < \sigma < \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2}}\right) = 1 - \alpha$
- ▼ Intervalle de confiance :  
 $\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi_{\alpha/2}^2}} < \sigma < \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2}}$  à un niveau de confiance de  $(1 - \alpha)100\%$

106

### Proportion = moyenne

- ▼ Caractère quantitatif (rappel)
  - ▶ Moyenne :  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$
  - ▶  $n > 30$ ,  $\sigma$  connu
  - ▶  $\bar{X} = N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$
- ▼ Caractère qualitatif
  - ▶ Proportion :  $\hat{P} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$
  - ▶  $n > 30$ ,  $n\hat{p} \geq 5$ ,  $n(1 - \hat{p}) \geq 5$ , ni  $\hat{p} \approx 0$ , ni  $\hat{p} \approx 1$
  - ▶  $\hat{P} = N\left(\pi, \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}\right)$
- ▼ Les proportions (fréquences relatives) sont des moyennes !
- ▼  $\bar{X} \rightarrow \hat{P}$  : remplacer
  - ▶  $\mu \rightarrow \pi$
  - ▶  $\sigma \rightarrow \sqrt{\pi(1 - \pi)}$

107

### Estimation de la proportion

▼ Caractère quantitatif (rappel)

- ▶  $P(\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$
- ▶ Intervalle de confiance à un niveau de confiance de  $(1 - \alpha)100\%$  :  
$$\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$
- ▶  $n_{\min} = \left( \frac{z_{\alpha/2} \sigma}{e_{\max}} \right)^2$  : taille d'échantillon minimale

▼ Caractère qualitatif

- ▶  $P\left(\hat{P} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}} < \pi < \hat{P} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}\right) = 1 - \alpha$
- ▶ Intervalle de confiance à un niveau de confiance de  $(1 - \alpha)100\%$  :  
$$\hat{p} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} < \pi < \hat{p} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$
- ▶  $n_{\min} = \left( \frac{z_{\alpha/2}}{e_{\max}} \right)^2 \hat{p}(1 - \hat{p})$  : taille d'échantillon minimale  
estimer  $\hat{p}$  (1er échantillonnage,  $n \geq 30$ ) ou prendre  $\hat{p} = 0.5$  (pire scénario)

108

### Estimation du rapport des variances (deux échantillons)

- ▼ Échantillons aléatoires et indépendants de tailles  $n_1, n_2$
- ▼ Provenant de populations normales de variances  $\sigma_1^2, \sigma_2^2$
- ▼ Variances des échantillons :  $S_1^2, S_2^2$
- ▼  $F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{V_1/\nu_1}{V_2/\nu_2}$
- ▼  $V_i = \frac{(n_i-1)S_i^2}{\sigma_i^2}$  : v.a. indépendantes, loi du  $\chi^2$  à  $\nu_i = n_i - 1$  d.l.
- ▼  $F$  : loi de Fisher - Snedecor avec  $\nu_1$  et  $\nu_2$  d.l.
- ▼  $P(f_{1-\alpha/2}(\nu_1, \nu_2) < F < f_{\alpha/2}(\nu_1, \nu_2)) = 1 - \alpha$
- ▼  $P\left(f_{1-\alpha/2}(\nu_1, \nu_2) < \frac{\sigma_2^2 S_1^2}{\sigma_1^2 S_2^2} < f_{\alpha/2}(\nu_1, \nu_2)\right) = 1 - \alpha$
- ▼  $P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{f_{\alpha/2}(\nu_1, \nu_2)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{f_{1-\alpha/2}(\nu_1, \nu_2)}\right) = 1 - \alpha$
- ▼  $P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{f_{\alpha/2}(\nu_1, \nu_2)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{S_1^2}{S_2^2} f_{\alpha/2}(\nu_2, \nu_1)\right) = 1 - \alpha$

109

## Tests d'hypothèse

110

### Définitions

- ▼ Hypothèse : énoncé concernant les caractéristiques d'une population
- ▼ Hypothèse nulle : fixer un paramètre  $\theta$  à une valeur particulière  $\theta_0$ 
  - ▶  $H_0 : \theta = \theta_0$
- ▼ Hypothèse alternative (trois choix possibles)
  - ▶  $H_1 : \theta \neq \theta_0$  (test bilatéral)
  - ▶  $H_1 : \theta < \theta_0$  (test unilatéral)
  - ▶  $H_1 : \theta > \theta_0$  (test unilatéral)
- ▼ Test : procédure suivie afin d'accepter/rejeter  $H_0$
- ▼ Rejet > Acceptation (non-rejet)
- ▼ En pratique : formuler  $H_0$  comme l'opposé de ce qu'on veut démontrer !

111

### Types et probabilités d'erreur

Types d'erreur		
décision \ état du monde	$H_0$ vraie	$H_1$ vraie
non-rejet de $H_0$	OK	Type II
rejet de $H_0$	Type I	OK

- ▼  $P(\text{Type I}) = P(\text{rejet de } H_0 | H_0 \text{ vraie}) = \alpha$
- ▼  $P(\text{Type II}) = P(\text{non-rejet de } H_0 | H_1 \text{ vraie}) = \beta$

Probabilités d'erreur		
décision \ état du monde	$H_0$ vraie	$H_1$ vraie
non-rejet de $H_0$	$1 - \alpha$	$\beta$
rejet de $H_0$	$\alpha$	$1 - \beta$

- ▼  $\alpha$  : seuil de signification (calculé dans l'univers de  $H_0$ , ok)
- ▼  $1 - \beta$  : puissance du test (calculée dans l'univers de  $H_1$ , ???)
  - ▶ Préciser  $H_1$ , ensuite calculer une valeur de  $\beta$  liée à cette  $H_1$

112

### Tests : la procédure à suivre

1. Formuler les hypothèses  $H_0$  et  $H_1$
2. Choisir le seuil de signification  $\alpha$  (typiquement 1% ou 5%)
3. Déterminer la statistique utilisée ainsi que sa distribution
4. Définir la région critique (région de rejet de  $H_0$ )
5. Adopter une règle de décision (à partir des valeurs critiques)
6. Prélever un échantillon et faire les calculs
7. Décider

113

### Test sur une moyenne (1/3)

1.  $H_0 : \mu = \mu_0, H_1 : \mu \neq \mu_0$  (test bilatéral)
2.  $\alpha$  à définir
3. Statistique à utiliser :  $\bar{X}$  ; distribution :  
 $Z = (\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$  si on connaît  $\sigma$  ou  $n$  grand (cas présenté dans la suite)  
 $T = (\bar{X} - \mu)/(S/\sqrt{n})$  si on ne connaît pas  $\sigma$  et  $n$  petit (population normale)
4.  $P(\text{non-rejet de } H_0 | H_0 \text{ vraie}) = 1 - \alpha$   
 $P(\text{non-rejet de } H_0 | \mu = \mu_0) = 1 - \alpha$   
 $P(z_{1-\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2} | \mu = \mu_0) = 1 - \alpha$   
 $P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2} | \mu = \mu_0) = 1 - \alpha$   
 $P(-z_{\alpha/2} < (\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n}) < z_{\alpha/2} | \mu = \mu_0) = 1 - \alpha$   
 $P(-z_{\alpha/2} < (\bar{X} - \mu_0)/(\sigma/\sqrt{n}) < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$   
région critique :  $Z = (\bar{X} - \mu_0)/(\sigma/\sqrt{n}) < -z_{\alpha/2}$  et  $Z = (\bar{X} - \mu_0)/(\sigma/\sqrt{n}) > z_{\alpha/2}$
5. Règle de décision :  
rejeter  $H_0$  si  $\bar{x} < \bar{x}_{c1} = \mu_0 - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  ou  $\bar{x} > \bar{x}_{c2} = \mu_0 + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

114

### Test sur une moyenne (2/3)

1.  $H_0 : \mu = \mu_0, H_1 : \mu > \mu_0$  (test unilatéral)
2.  $\alpha$  à définir
3. Statistique à utiliser :  $\bar{X}$  ; distribution :  
 $Z = (\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$  si on connaît  $\sigma$  ou  $n$  grand (cas présenté dans la suite)  
 $T = (\bar{X} - \mu)/(S/\sqrt{n})$  si on ne connaît pas  $\sigma$  et  $n$  petit (population normale)
4.  $P(\text{non-rejet de } H_0 | H_0 \text{ vraie}) = 1 - \alpha$   
 $P(\text{non-rejet de } H_0 | \mu = \mu_0) = 1 - \alpha$   
 $P(Z < z_\alpha | \mu = \mu_0) = 1 - \alpha$   
 $P((\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n}) < z_\alpha | \mu = \mu_0) = 1 - \alpha$   
 $P((\bar{X} - \mu_0)/(\sigma/\sqrt{n}) < z_\alpha) = 1 - \alpha$   
région critique :  $Z = (\bar{X} - \mu_0)/(\sigma/\sqrt{n}) > z_\alpha$
5. Règle de décision :  
rejeter  $H_0$  si  $\bar{x} > \bar{x}_c = \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

115

### Test sur une moyenne (3/3) : taille de l'échantillon

- ▼  $H_0 : \mu = \mu_0, H_1 : \mu > \mu_0$  (test unilatéral)
- ▼  $\alpha = P(\text{rejet de } H_0 | H_0 \text{ vraie}) = P(\text{rejet de } H_0 | \mu = \mu_0) = P(Z > z_\alpha | \mu = \mu_0)$   
 $= P((\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n}) > z_\alpha | \mu = \mu_0)$   
 $= P((\bar{X} - \mu_0)/(\sigma/\sqrt{n}) > z_\alpha)$
- ▼ Règle de décision : rejeter  $H_0$  si  $\bar{x} > \bar{x}_c = \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
- ▼  $\beta = P(\text{rejet de } H_1 | H_1 \text{ vraie}) = P(\text{non-rejet de } H_0 | H_1 \text{ vraie})$   
 $= P(\bar{X} < \bar{x}_c | H_1 \text{ vraie})$
- ▼ Préciser  $H_1 : \mu = \mu_0 + \delta$
- ▼  $\beta = P(\bar{X} < \bar{x}_c | \mu = \mu_0 + \delta) = P(Z < (\bar{x}_c - \mu)/(\sigma/\sqrt{n}) | \mu = \mu_0 + \delta)$
- ▼  $= P(Z < \frac{\bar{x}_c - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} - \frac{\delta}{\sigma/\sqrt{n}})$
- ▼  $= P(Z < z_\alpha - \frac{\delta}{\sigma/\sqrt{n}})$
- ▼  $-z_\beta = z_\alpha - \frac{\delta}{\sigma/\sqrt{n}}$
- ▼  $n = (z_\alpha + z_\beta)^2 \frac{\sigma^2}{\delta^2}$

116

### Test sur une variance (1/2)

1.  $H_0 : \sigma = \sigma_0, H_1 : \sigma \neq \sigma_0$  (test bilatéral)
2.  $\alpha$  à définir
3. Statistique à utiliser :  $S$  ; distribution :  
 $X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ , v.a. loi du  $\chi^2$  à  $\nu = n - 1$  degrés de liberté (population normale)
4.  $P(\text{non-rejet de } H_0 | H_0 \text{ vraie}) = 1 - \alpha$   
 $P(\text{non-rejet de } H_0 | \sigma = \sigma_0) = 1 - \alpha$   
 $P(\chi_{1-\alpha/2}^2 < X^2 < \chi_{\alpha/2}^2 | \sigma = \sigma_0) = 1 - \alpha$   
 $P\left(\chi_{1-\alpha/2}^2 < \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi_{\alpha/2}^2\right) = 1 - \alpha$   
 $P\left(\frac{\chi_{1-\alpha/2}^2 \sigma_0^2}{(n-1)} < S^2 < \frac{\chi_{\alpha/2}^2 \sigma_0^2}{(n-1)}\right) = 1 - \alpha$   
région critique :  $X^2 < \chi_{1-\alpha/2}^2$  et  $X^2 > \chi_{\alpha/2}^2$
5. Règle de décision :  
rejeter  $H_0$  si  $s^2 < s_{c1}^2 = \chi_{1-\alpha/2}^2 \sigma_0^2 / (n - 1)$  ou  $s^2 > s_{c2}^2 = \chi_{\alpha/2}^2 \sigma_0^2 / (n - 1)$

117

### Test sur une variance (2/2)

1.  $H_0 : \sigma = \sigma_0, H_1 : \sigma < \sigma_0$  (test unilatéral)
2.  $\alpha$  à définir
3. Statistique à utiliser :  $S$  ; distribution :  
 $X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ , v.a. loi du  $\chi^2$  à  $\nu = n - 1$  degrés de liberté (population normale)
4.  $P(\text{non-rejet de } H_0 | H_0 \text{ vraie}) = 1 - \alpha$   
 $P(\text{non-rejet de } H_0 | \sigma = \sigma_0) = 1 - \alpha$   
 $P(\chi_{1-\alpha}^2 < X^2 | \sigma = \sigma_0) = 1 - \alpha$   
 $P\left(\chi_{1-\alpha}^2 < \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\right) = 1 - \alpha$   
 $P\left(\frac{\chi_{1-\alpha}^2 \sigma_0^2}{(n-1)} < S^2\right) = 1 - \alpha$   
région critique :  $X^2 < \chi_{1-\alpha}^2$
5. Règle de décision :  
rejeter  $H_0$  si  $s^2 < s_c^2 = \chi_{1-\alpha}^2 \sigma_0^2 / (n - 1)$

118

### Test sur une proportion

1.  $H_0 : \pi = \pi_0, H_1 : \pi \neq \pi_0$  (test bilatéral)

2.  $\alpha$  à définir

3. Statistique à utiliser :  $\hat{P}$  ; distribution :

$$Z = (\hat{P} - \pi) / (\sqrt{\pi(1-\pi)} / \sqrt{n})$$

4.  $P(\text{non-rejet de } H_0 | H_0 \text{ vraie}) = 1 - \alpha$

$$P(\text{non-rejet de } H_0 | \pi = \pi_0) = 1 - \alpha$$

$$P(-z_{\alpha/2} < (\hat{P} - \pi_0) / (\sqrt{\pi_0(1-\pi_0)} / \sqrt{n}) < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

région critique :  $Z < -z_{\alpha/2}$  et  $Z > z_{\alpha/2}$

5. Règle de décision :

$$\text{rejeter } H_0 \text{ si } \hat{p} < \hat{p}_{c1} = \pi_0 - z_{\alpha/2} \frac{\sqrt{\pi_0(1-\pi_0)}}{\sqrt{n}} \text{ ou } \hat{p} > \hat{p}_{c1} = \pi_0 + z_{\alpha/2} \frac{\sqrt{\pi_0(1-\pi_0)}}{\sqrt{n}}$$

1.  $H_0 : \pi = \pi_0, H_1 : \pi > \pi_0$  (test unilatéral)

...

5. Règle de décision : rejeter  $H_0$  si  $z > z_\alpha$

$$\text{c.à.d. } \hat{p} > \hat{p}_c = \pi_0 + z_\alpha \frac{\sqrt{\pi_0(1-\pi_0)}}{\sqrt{n}}$$

## Récapitulatif : un échantillon

120

### Statistiques d'un échantillon : moyenne

Paramètre $\theta$	$\mu$		
Population	$\approx$ normale	—	$\approx$ normale
Écart-type $\sigma$	connu	connu	inconnu
Échantillon	—	$n > 30$	$n > 30$ $n < 30$
Statistique $\hat{\Theta}$	$\bar{X}$		
St. normalisée	$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$	$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$	$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$
Distribution	$N(0, 1)$		Student ( $\nu$ )
D.L.	—		$n - 1$
Mesure $\hat{\theta}$	$\bar{x}$		

121

**Statistiques d'un échantillon : proportion, variance**

Paramètre $\theta$	$\pi$	$\sigma^2$
Population	—	$\approx$ normale
Écart-type $\sigma$	—	—
Échantillon	$n > 30$ <sup>a</sup>	—
Statistique $\hat{\Theta}$	$\hat{P}$	$S^2$
St. normalisée	$Z = \frac{\hat{P} - \pi}{\sqrt{\pi(1-\pi)/n}}$	$X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$
Distribution	$N(0, 1)$	khi-deux ( $\nu$ )
D.L.	—	$n - 1$
Mesure $\hat{\theta}$	$\hat{p}$	$s^2$

122

<sup>a</sup>En plus :  $n\hat{p} \geq 5$ ,  $n(1 - \hat{p}) \geq 5$ , ni  $\hat{p} \approx 0$ , ni  $\hat{p} \approx 1$ .

**Estimation / tests : un échantillon**

Stat. norm.	Intervalle de confiance	Test d'hypothèse $H_0 : \theta = \theta_0$		
		$H_1 : \theta \neq \theta_0$	$H_1 : \theta < \theta_0$	$H_1 : \theta > \theta_0$
$Z$	$-z_{\frac{\alpha}{2}} < z < z_{\frac{\alpha}{2}}$	$z < -z_{\frac{\alpha}{2}}$ ou $z > z_{\frac{\alpha}{2}}$	$z < -z_{\alpha}$	$z > z_{\alpha}$
$T$	$-t_{\frac{\alpha}{2}} < t < t_{\frac{\alpha}{2}}$	$t < -t_{\frac{\alpha}{2}}$ ou $t > t_{\frac{\alpha}{2}}$	$t < -t_{\alpha}$	$t > t_{\alpha}$
$X^2$	$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}} < \chi^2 < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}$	$\chi^2 < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}$ ou $\chi^2 > \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}$	$\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha}$	$\chi^2 > \chi^2_{\alpha}$
	mettre sous la forme : $\theta_L < \theta < \theta_H$	« entrer dans le monde de $H_0$ » : $\theta = \theta_0$ , calculer $z, t, \chi^2$ à partir des mesures ; décisions de <i>rejet</i> de $H_0$		

- ▼ Intervalle de confiance : niveau de confiance  $1 - \alpha$
- ▼ Tests d'hypothèse : seuil de signification  $\alpha$
- ▼ Voir tableaux unifiés dans le document « Aide-mémoire ».

123

## Intervalles et tests avec deux échantillons

124

### Distribution de la différence des moyennes (1/6) - rappel #98

- ▼ Conditions :  $\sigma_1, \sigma_2$  connus et
  - ▶ populations normales  $N(\mu_1, \sigma_1), N(\mu_2, \sigma_2)$  ou
  - ▶  $n_1 > 30$  et  $n_2 > 30$ , ou
  - ▶ populations « presque » normales
- ▼ Échantillons aléatoires et indépendants de tailles  $n_1, n_2$ ; moyennes  $\bar{X}_1, \bar{X}_2$ 
  - ▶  $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$  : normale
  - ▶  $\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \mu_{\bar{X}_1} - \mu_{\bar{X}_2} = \mu_1 - \mu_2$
  - ▶  $\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}^2 \stackrel{\text{ind}}{=} \sigma_{\bar{X}_1}^2 + \sigma_{\bar{X}_2}^2 = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$

125

### Distribution de la différence des moyennes (2/6)

- ▼ Échantillons aléatoires et indépendants de tailles  $n_1, n_2$
- ▼ Populations normales ou grands échantillons ( $n_1 > 30, n_2 > 30$ )
- ▼  $\sigma_1, \sigma_2$  : connus
- ▼  $Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \rightarrow N(0, 1)$
- ▼ Intervalle de confiance :  $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$
- ▼ Test d'hypothèse :
  1.  $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = d_0, H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq d_0$  (test bilatéral)
  5. Règle de décision : rejeter  $H_0$  si  $z < -z_{\alpha/2}$  ou  $z > z_{\alpha/2}$ 
    - $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)_{c1} = d_0 - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$  ou
    - $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) > (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)_{c2} = d_0 + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$

126

### Distribution de la différence des moyennes (3/6)

- ▼ Échantillons aléatoires et indépendants de tailles  $n_1, n_2$
- ▼ Populations normales **et** grands échantillons ( $n_1 > 30, n_2 > 30$ )
- ▼  $\sigma_1, \sigma_2$  : inconnus
- ▼  $Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \rightarrow \approx N(0, 1)$
- ▼ Équivalent de  $T \rightarrow Z$  pour grands échantillons
- ▼ Intervalle de confiance :  $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$
- ▼ Test d'hypothèse :
  1.  $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = d_0, H_1 : \mu_1 - \mu_2 > d_0$  (test unilatéral)
  5. Règle de décision : rejeter  $H_0$  si  $z > z_\alpha$   
 $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) > (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)_c = d_0 + z_\alpha \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$

127

### Distribution de la différence des moyennes (4/6)

- ▼ Échantillons aléatoires et indépendants de tailles  $n_1, n_2$
- ▼ Populations normales **et** petits échantillons ( $n_1 < 30$  ou  $n_2 < 30$ )
- ▼  $\sigma_1, \sigma_2$  : inconnus mais  $\sigma_1 = \sigma_2$  (à tester)
- ▼  $T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_c^2}{n_1} + \frac{s_c^2}{n_2}}} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_c \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \rightarrow$  Student
- ▼ Variance commune :  $S_c^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_{1i} - \bar{X}_1)^2 + \sum_{i=1}^{n_2} (X_{2i} - \bar{X}_2)^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)} = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)}$
- ▼  $T$  : Student à  $(n_1 + n_2 - 2)$  d.l.
- ▼ Intervalle de confiance :  $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_{\alpha/2} s_c \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{\alpha/2} s_c \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$
- ▼ Test d'hypothèse : ...
- ▼ À propos des conditions :
  - ▶  $\sigma_1 \approx \sigma_2$  ou populations  $\approx$  normales : OK
  - ▶  $\sigma_1 \neq \sigma_2$  et normales : OK si  $n_1 = n_2$

128

### Distribution de la différence des moyennes (5/6)

- ▼ Échantillons aléatoires et indépendants de tailles  $n_1, n_2$
- ▼ Populations normales **et** petits échantillons ( $n_1 < 30$  ou  $n_2 < 30$ )
- ▼  $\sigma_1, \sigma_2$  : inconnus et  $\sigma_1 \neq \sigma_2$  (à tester)
- ▼  $T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \rightarrow$  Student à  $\nu$  d.l. ;  $\nu = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1-1} + \frac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2-1}}$
- ▼ Arrondir  $\nu$  au nombre entier *inférieur*.
- ▼ Intervalle de confiance :  $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_{\alpha/2} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{\alpha/2} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$
- ▼ Test d'hypothèse :
  1.  $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = d_0, H_1 : \mu_1 - \mu_2 < d_0$  (test unilatéral)
  5. Règle de décision : rejeter  $H_0$  si  $t < t_\alpha$   
 $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)_c = d_0 - t_\alpha \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$

129

### Distribution de la différence des moyennes (6/6)

- ▼ Échantillons aléatoires et **appariés** de tailles  $n_1 = n_2 = n$
- ▼ Appariés : « avant / après »
- ▼ Population : nouvelle v.a.  $D = X_1 - X_2$  ( $\mu_D, \sigma_D$ )
- ▼ Échantillon : calculer  $d_i = x_{1i} - x_{2i}$  ; oublier  $X_1, X_2$  !
- ▼ Population normale ou grands échantillons ( $n > 30$ ),  $\sigma_D$  connu :  
 $Z = \frac{\bar{D} - \mu_D}{\sigma_D / \sqrt{n}} \rightarrow N(0, 1)$
- ▼ Population normale et petits échantillons ( $n < 30$ ),  $\sigma_D$  inconnu :  
 $T = \frac{\bar{D} - \mu_D}{s_D / \sqrt{n}}$  à  $(n - 1)$  d.l.
- ▼ Intervalle de confiance :  $\bar{d} - t_{\alpha/2} \frac{s_D}{\sqrt{n}} < \mu_D < \bar{d} + t_{\alpha/2} \frac{s_D}{\sqrt{n}}$
- ▼ Test d'hypothèse : ...
- ▼ Échantillons appariés : un seul nouvel échantillon !

130

### Distribution de la différence des proportions

- ▼ Échantillons aléatoires et indépendants de tailles  $n_1, n_2$
- ▼ Grands échantillons ( $n_1 > 30, n_2 > 30$ )
- ▼ Proportions :  $\hat{P}_i = N(\pi_i, \sqrt{\pi_i(1-\pi_i)}/\sqrt{n_i})$
- ▼  $Z = \frac{(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - (\pi_1 - \pi_2)}{\sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}}} \rightarrow N(0, 1)$
- ▼ Intervalle de confiance :  
 $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}} < \pi_1 - \pi_2 < (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}}$  ;  
remplacer  $\pi_i(1-\pi_i) \rightarrow \hat{p}_i(1-\hat{p}_i)$
- ▼ Test d'hypothèse :
  1.  $H_0 : \pi_1 - \pi_2 = d_0$  ( $\pi_1 = \pi_2 + d_0$ ) ,  $H_1 : \pi_1 - \pi_2 > d_0$  (test unilatéral)
  5. Règle de décision : rejeter  $H_0$  si  $z > z_\alpha$   
 $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) > (\hat{p}_1 - \hat{p}_2)_c = d_0 + z_\alpha \sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}}$   
Si  $d_0 = 0, \pi_1 = \pi_2$  : remplacer  $\pi_j \rightarrow \hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} x_{1i} + \sum_{i=1}^{n_2} x_{2i}}{n_1 + n_2} = \frac{n_1 \hat{p}_1 + n_2 \hat{p}_2}{n_1 + n_2}$   
Si  $d_0 \neq 0$  : remplacer  $\pi_j \rightarrow \hat{p}_j$

131

### Distribution du rapport des variances (1/2) - rappel #99

- ▼ Échantillons aléatoires et indépendants de tailles  $n_1, n_2$
- ▼ Provenant de populations normales de variances  $\sigma_1^2, \sigma_2^2$
- ▼ Variances des échantillons :  $S_1^2, S_2^2$
- ▼  $F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{V_1/\nu_1}{V_2/\nu_2}$
- ▼  $V_i = \frac{(n_i-1)S_i^2}{\sigma_i^2}$  : v.a. indépendantes, loi du  $\chi^2$  à  $\nu_i = n_i - 1$  d.l.
- ▼  $F$  : loi de Fisher (1924) - Snedecor (1934) avec  $\nu_1$  et  $\nu_2$  d.l.
- ▼  $F \geq 0$
- ▼  $P(F > f_\alpha(\nu_1, \nu_2)) = \alpha$  (définition de  $f_\alpha(\nu_1, \nu_2)$ )
- ▼  $f_\alpha(\nu_1, \nu_2) = \frac{1}{f_{1-\alpha}(\nu_2, \nu_1)}$  (propriété de la loi  $F$ )

132

### Distribution du rapport des variances (2/2)

- ▼  $F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$
- ▼ Intervalle de confiance (niveau de confiance  $1 - \alpha$ ) :
  - ▶  $f_{1-\alpha/2}(\nu_1, \nu_2) < f < f_{\alpha/2}(\nu_1, \nu_2)$
  - ▶  $\frac{s_1^2}{s_2^2} \frac{1}{f_{\alpha/2}(\nu_1, \nu_2)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{s_1^2}{s_2^2} \frac{1}{f_{1-\alpha/2}(\nu_1, \nu_2)}$
- ▼ Test d'hypothèse  $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$
- ▼ Règle de décision : rejeter  $H_0$  si
  - ▶  $H_1 : \sigma_1 \neq \sigma_2$   
 $f < f_{1-\alpha/2}$  ou  $f > f_{\alpha/2}$  c-à-d  $s_1^2/s_2^2 < f_{1-\alpha/2}$  ou  $s_1^2/s_2^2 > f_{\alpha/2}$
  - ▶  $H_1 : \sigma_1 > \sigma_2$   
 $f > f_{\alpha}$  c-à-d  $s_1^2/s_2^2 > f_{\alpha}$
  - ▶  $H_1 : \sigma_1 < \sigma_2$   
 $f < f_{1-\alpha}$  c-à-d  $s_1^2/s_2^2 < f_{1-\alpha}$

133

## Récapitulatif : deux échantillons

134

### Statistiques de deux (grands) échantillons : moyenne

Paramètre $\theta$	$\mu_2 - \mu_1$		
Populations	$\approx$ normales	—	$\approx$ normales
Écart-types $\sigma_1, \sigma_2$	connus	connus	inconnus
Échantillons	—	$n_1 > 30$ et $n_2 > 30$	$n_1 > 30$ et $n_2 > 30$
Statistique $\hat{\theta}$	$\bar{X}_2 - \bar{X}_1$		
St. normalisée	$Z = \frac{(\bar{X}_2 - \bar{X}_1) - (\mu_2 - \mu_1)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$		$Z = \frac{(\bar{X}_2 - \bar{X}_1) - (\mu_2 - \mu_1)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$
Distribution	$N(0, 1)$		
Degrés de liberté	—		
Mesure $\hat{\theta}$	$\bar{x}_2 - \bar{x}_1$		

135

**Statistiques de deux (petits) échantillons : moyenne**

Paramètre $\theta$	$\mu_2 - \mu_1$	
Populations	$\approx$ normales	
Écart-types $\sigma_1, \sigma_2$	inc., $\sigma_1 = \sigma_2$ ou $n_1 = n_2$	inc., $\sigma_1 \neq \sigma_2$ et $n_1 \neq n_2$
Échantillons	$n_1 < 30$ ou $n_2 < 30$	
Statistique $\hat{\Theta}$	$\bar{X}_2 - \bar{X}_1$	
St. normalisée	$T = \frac{(\bar{X}_2 - \bar{X}_1) - (\mu_2 - \mu_1)}{S_c \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$	$T = \frac{(\bar{X}_2 - \bar{X}_1) - (\mu_2 - \mu_1)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$
Distribution	Student ( $\nu$ )	
Degrés de liberté	$n_1 + n_2 - 2$	$\nu^*$
Mesure $\hat{\theta}$	$\bar{x}_2 - \bar{x}_1$	
Rappels	$S_c$ : diapo #128	$\nu^*$ : diapo #129

136

**Statistiques de deux échantillons : proportion, variance**

Paramètre $\theta$	$\pi_2 - \pi_1$	$\sigma_1^2/\sigma_2^2$
Populations	—	$\approx$ normales
Écart-types $\sigma_1, \sigma_2$	—	—
Échantillons	$n_1 > 30$ et $n_2 > 30$ <sup>a</sup>	—
Statistique $\hat{\Theta}$	$\hat{P}_2 - \hat{P}_1$	$F$
St. normalisée	$Z = \frac{(\hat{P}_2 - \hat{P}_1) - (\pi_2 - \pi_1)}{\sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}}}$	$F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}$
Distribution	$N(0, 1)$	Fischer ( $\nu_1, \nu_2$ )
Degrés de liberté	—	$n_1 - 1, n_2 - 1$
Mesure $\hat{\theta}$	$\hat{p}_2 - \hat{p}_1$	$s_1^2/s_2^2$

137

<sup>a</sup>En plus :  $n_i \hat{p}_i \geq 5$ ,  $n_i(1 - \hat{p}_i) \geq 5$ , ni  $\hat{p}_i \approx 0$ , ni  $\hat{p}_i \approx 1$  ( $i = 1, 2$ ).

**Estimation / tests : deux échantillons**

Stat. norm.	Intervalle de confiance	Test d'hypothèse $H_0 : \theta = \theta_0$		
		$H_1 : \theta \neq \theta_0$	$H_1 : \theta < \theta_0$	$H_1 : \theta > \theta_0$
$Z$	$-z_{\frac{\alpha}{2}} < z < z_{\frac{\alpha}{2}}$	$z < -z_{\frac{\alpha}{2}}$ ou $z > z_{\frac{\alpha}{2}}$	$z < -z_{\alpha}$	$z > z_{\alpha}$
$T$	$-t_{\frac{\alpha}{2}} < t < t_{\frac{\alpha}{2}}$	$t < -t_{\frac{\alpha}{2}}$ ou $t > t_{\frac{\alpha}{2}}$	$t < -t_{\alpha}$	$t > t_{\alpha}$
$F$	$f_{1-\frac{\alpha}{2}} < f < f_{\frac{\alpha}{2}}$	$f < f_{1-\frac{\alpha}{2}}$ ou $f > f_{\frac{\alpha}{2}}$	$f < f_{1-\alpha}$	$f > f_{\alpha}$
	mettre sous la forme : $\theta_L < \theta < \theta_H$	« entrer dans le monde de $H_0$ » : $\theta = \theta_0$ , calculer $z, t, \chi^2$ à partir des mesures ; décisions de <i>rejet</i> de $H_0$		

- ▼ Intervalle de confiance : niveau de confiance  $1 - \alpha$
- ▼ Tests d'hypothèse : seuil de signification  $\alpha$
- ▼ Voir tableaux unifiés dans le document « Aide-mémoire ».

## Tests : au delà du seuil de signification

139

### Seuil descriptif (p-value)

- ▼ Test statistique : « 2. Choisir le seuil de signification  $\alpha$  »
- ▼ « Typiquement 1% ou 5% »
- ▼ Comment choisir ?
- ▼ Comment décider ?
- ▼ *Pourquoi* choisir  $\alpha$  ?
- ▼ Tests classiques :
  - ▶ Mesurer  $\hat{\theta}$  ; comparer  $\hat{\theta}$  aux valeurs critiques  $\hat{\theta}_c$
  - ▶ Valeurs critiques dépendent de  $\alpha$
- ▼ Alternative
  - ▶ Calculer  $\alpha_p$  (p-value) telle que  $\hat{\theta} = \hat{\theta}_c$
  - ▶  $\alpha_p$  : rejeter  $H_0$  de façon marginale
- ▼ P-value (seuil descriptif) : la plus petite valeur de  $\alpha = P(\text{rejeter } H_0 | H_0 \text{ vraie})$  qui conduirait au rejet de  $H_0$
- ▼ La probabilité de se retrouver « au moins aussi loin » de la  $H_0$  – dans le sens de la  $H_1$  – que l'échantillon examiné, si  $H_0$  est vraie.

140

### Seuil descriptif (p-value) : exemple (1/3)

▼ Test sur la moyenne, petit échantillon, population normale,  $\sigma$  inconnu

1.  $H_0 : \mu = \mu_0, H_1 : \mu \neq \mu_0$  (test bilatéral)
2.  $\alpha$  à définir
3. Statistique à utiliser :  $\bar{X}$  ; distribution :  
 $T = (\bar{X} - \mu)/(S/\sqrt{n})$
4. Région critique :  $T < -t_{\alpha/2}$  et  $T > t_{\alpha/2}$
5. Règle de décision :  
rejeter  $H_0$  si  $t < -t_{\alpha/2}$  ou  $> t_{\alpha/2}$
6. Prélever un échantillon et faire les calculs
7. Décider

141

### Seuil descriptif (p-value) : exemple (2/3)

6. Prélever un échantillon et faire les calculs

Population  $N(0.5, 1), n = 5$

```
x <- rnorm(5, mean=0.5, sd=1)
```

```
> x
```

```
[1] 0.4303745 -1.2195277 -0.3570756 2.2734783 -0.5112132
```

```
> mean(x)
```

```
[1] 0.1232073
```

```
> sd(x)
```

```
[1] 1.337359
```

$\mu_0 = 0$ , calculer  $t$  :

```
> t = ( mean(x) - 0 ) / ( sd(x) / sqrt(5) )
```

```
> t
```

```
[1] 0.2060029
```

$\alpha = 0.05$ , calculer  $t_c = t_{\alpha/2}$  :

```
> qt(0.025, df=4, lower.tail=F)
```

```
[1] 2.776445
```

7. Décider :  $-t_{\alpha/2} < t < t_{\alpha/2}$ , on ne peut pas rejeter  $H_0 : \mu = \mu_0 = 0$

142

### Seuil descriptif (p-value) : exemple (3/3)

6. Prélever un échantillon et faire les calculs

$\mu_0 = 0$ , calculer  $t$  :

```
> t = ( mean(x) - 0 ) / ( sd(x) / sqrt(5) )
```

```
> t
```

```
[1] 0.2060029
```

Quelle est la valeur de  $\alpha$  qui donne  $t = t_c = t_{\alpha/2}$  ?

```
> pt(t, df=4, lower.tail=F)
```

```
[1] 0.4234244
```

p-value/2 = 0.4234244, p-value = 0.8468488

7. Décider : échantillon très probable si  $H_0$  est vraie

▼ T-test avec R :

```
> t.test(x, mean=0, alternative = c("two.sided"))
```

```
One Sample t-test
```

```
data : x
```

```
t = 0.206, df = 4, p-value = 0.8468
```

```
alternative hypothesis : true mean is not equal to 0
```

```
95 percent confidence interval :
```

```
-1.537343 1.783758
```

143

## Test du $\chi^2$

144

### Définition – cadre général

Comparer, à l'issue d'une expérience aléatoire, des fréquences expérimentales aux fréquences prévues par la théorie (Pearson, 1900).

- ▼  $k$  : nombre de fréquences à comparer (nombre de classes)
- ▼  $o_i$  : fréquences Observées (obtenues expérimentalement)
- ▼  $e_i$  : fréquences « Espérées » (théoriques, à calculer)
- ▼

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$$

- ▼ Loi du  $\chi^2$  à  $\nu$  degrés de liberté ; si  $o_i = e_i$ ,  $\chi^2 = 0$ , sinon  $\chi^2 > 0$
- ▼ Calculer  $\chi^2$  à partir de  $o_i, e_i$  ; obtenir  $\alpha = P(X^2 > \chi^2)$ , la p-value
- ▼  $\nu = k - 1 - (\text{nombre de paramètres estimés utilisés dans le calcul de } e_i)$
- ▼ Condition :  $e_i \geq 5$  au moins pour 80% des classes ;  $e_i > 0$  pour les autres
- ▼ Applications : test d'adéquation, d'indépendance, d'homogénéité, de proportions

145

### Test d'adéquation (ou d'ajustement)

$H_0$  : les données expérimentales ont été obtenues à partir d'une population suivant la loi  $p_X(x)$  (p.ex., normale, uniforme, etc).

- ▼ Exemple : données sur plusieurs lancers d'un dé (données simulées...)

Face	1	2	3	4	5	6	Total $N$
Fréquence ( $o_i$ )	1037	937	1055	1034	929	1008	6000

- ▼  $H_0$  : le dé est bien équilibré ;  $p_i = 1/6$ ,  $e_i = p_i N = 1000$
- ▼ Conditions : OK (sinon grouper des classes voisines)
- ▼ Calculer  $\chi^2 = 14.624$
- ▼  $\nu = 6 - 1 - 0 = 5$
- ▼ p-value :  $P(X^2 > 14.624) =$   
`pchisq( 14.624, df=5, lower.tail=FALSE ) = 0.01210`
- ▼ On peut rejeter  $H_0$  au seuil de signification 5%
- ▼ Commande R :  
`obs.vec = c(1037, 937, 1055, 1034, 929, 1008)`  
`chisq.test( obs.vec, p = rep( 1/6, times=6 ) )`

146

### Test d'indépendance / tableau de contingence

On mesure, sur chaque individu d'un échantillon aléatoire de taille  $n$ , deux caractères  $X$  et  $Y$ , à  $l$  et  $c$  modalités, respectivement.

$H_0$  : les deux caractères  $X$  et  $Y$  sont indépendants.

- ▼ Exemple : le tabac et les jeunes, INPES, baromètre santé 2000 (tr. #18)

Sexe \ Fumeur	Oui	Non	Total
Homme	340 (310)	314 (344)	654
Femme	289 (319)	384 (354)	673
Total	629	698	1327

- ▼  $H_0$  :  $X$  et  $Y$  sont indépendants ;  $\pi_{ij} = \pi_i \pi_j$  ( $i = 1, \dots, l$  ;  $j = 1, \dots, c$ )
- ▼ On estime  $\pi_i$  et  $\pi_j$  à partir des fréquences marginales de l'échantillon

$$\pi_{ij} = \pi_i \pi_j \rightarrow \frac{e_{ij}}{n} = \frac{\sum_{j=1}^c o_{ij}}{n} \frac{\sum_{i=1}^l o_{ij}}{n} \rightarrow e_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^c o_{ij} \sum_{i=1}^l o_{ij}$$

- ▼ Degrés de liberté  $\nu = (lc - 1) - 1 - [(l - 1) + (c - 1)] = (l - 1)(c - 1)$
- ▼ Conditions : OK (sinon ? augmenter la taille de l'échantillon !)

147

### Test d'indépendance : correction de Yates

- ▼ Si  $\nu = 1$  (tableau  $2 \times 2$ ) utiliser :

$$\chi^2 = \sum_{i,k} \frac{(|o_{ij} - e_{ij}| - 0.5)^2}{e_{ij}}$$

- ▼ Calculer  $\chi^2 = 10.5256$
- ▼  $\nu = (2 - 1)(2 - 1) = 1$
- ▼ p-value :  $P(X^2 > 10.5256) =$   
`pchisq( 10.5256, df=1, lower.tail=FALSE ) = 0.00118`
- ▼ On peut rejeter  $H_0$  au seuil de signification 1%
- ▼ Commande R :  
`tableau.cont = rbind( c(340, 314), c(289, 384) )`  
`chisq.test( tableau.cont, correct=TRUE )`

148

### Test d'homogénéité

À partir de  $c$  populations, on obtient  $c$  échantillons aléatoires et indépendants, de taille  $n_j$  ( $j = 1, \dots, c$ ). On mesure sur chaque individu le même caractère  $X$ , à  $l$  modalités.

$H_0$  : la proportion d'individus appartenant à la  $i$ -ème modalité ( $i = 1, \dots, l$ ), reste la même pour toutes les populations (les populations sont *homogènes* par rapport au caractère étudié).

- ▼ Exemple : notes (fictives) échantillonnées dans trois parcours

Note \ Parcours	I	II	III	Total
$0 \leq x < 6$	32	15	8	55
$6 \leq x < 12$	123	60	43	226
$12 \leq x \leq 20$	145	125	149	419
Total ( $n_j$ )	300	200	200	700

- ▼  $H_0$  : proportion de chaque modalité constante ;  
 $\pi_{i1} = \pi_{i2} = \dots = \pi_{ic} = \pi_i$  ( $i = 1, \dots, l$ )
- ▼ On *estime*  $\pi_i$  à partir des fréquences marginales de l'échantillon

149

### Test d'homogénéité

Note \ Parcours	I	II	III	Total
$0 \leq x < 6$	32 (23.57)	15 (15.71)	8 (15.71)	55
$6 \leq x < 12$	123 (96.86)	60 (64.57)	43 (64.57)	226
$12 \leq x \leq 20$	145 (179.57)	125 (119.71)	149 (119.71)	419
Total ( $n_j$ )	300	200	200	700

- ▼  $H_0$  : proportion de chaque modalité constante ;  
 $\pi_{i1} = \pi_{i2} = \dots = \pi_{ic} = \pi_i$  ( $i = 1, \dots, l$ )
- ▼ On estime  $\pi_i$  à partir des fréquences marginales de l'échantillon

$$\pi_{ij} = \pi_i \rightarrow \frac{e_{ij}}{n_j} = \frac{\sum_{j=1}^c o_{ij}}{n} \rightarrow e_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^c o_{ij} \underbrace{\sum_{i=1}^l o_{ij}}_{n_j}$$

- ▼ Degrés de liberté  $\nu = (lc - 1) - 1 - [(l - 1) + (c - 1)] = (l - 1)(c - 1)$
- ▼ Conditions : OK (sinon ? augmenter la taille de l'échantillon !)
- ▼ Même formule que le test d'indépendance !

150

### Test d'homogénéité

▼

$$\chi^2 = \sum_{i,k} \frac{(o_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$$

- ▼ Calculer  $\chi^2 = 35.4729$
- ▼  $\nu = (3 - 1)(3 - 1) = 4$
- ▼ p-value :  $P(X^2 > 35.4729) =$   
`pchisq( 35.4729, df=4, lower.tail=FALSE ) = 3.714 · 10-7`
- ▼ On peut rejeter  $H_0$  pratiquement à n'importe quel seuil de signification !
- ▼ Commande R :  
`tableau = cbind(c(32, 123, 145), c(15, 60, 125), c(8, 43, 149))`  
`chisq.test( tableau )`

151

### Test de proportions

À partir de  $c$  populations, on obtient  $c$  échantillons aléatoires et indépendants, de taille  $n_j$  ( $j = 1, \dots, c$ ). On mesure sur chaque individu le même caractère  $X$ , à 2 modalités (« oui » / « non »).

$H_0$  : la proportion de « oui » reste la même pour toutes les populations (cas spécial du test d'homogénéité,  $l = 2$ ).

▼ Exemple : nombre de pièces défectueuses et moment de production

Pièces \ Créneau	Matin	Après-midi	Nuit	Total
Défectueuses (« O »)	45 (56.97)	55 (56.67)	70 (56.37)	170
Normales (« N »)	905 (893.03)	890 (888.33)	870 (883.63)	2665
Total ( $n_j$ )	950	945	940	2835

▼  $H_0 : \pi_1 = \pi_2 = \dots = \pi_c = \pi$

▼ On estime  $\pi$  à partir des fréquences marginales de l'échantillon

▼ « Oui » :  $\pi_j = \pi \rightarrow \frac{e_{1j}}{n_j} = \frac{\sum_{j=1}^c o_{1j}}{n}$

▼ « Non » :  $1 - \pi_j = 1 - \pi \rightarrow \frac{e_{2j}}{n_j} = \frac{\sum_{j=1}^c o_{2j}}{n}$

152

### Test de proportions

▼  $e_{ij} = \frac{n_j}{n} \sum_{j=1}^c o_{ij} \rightarrow e_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^c o_{ij} \sum_{i=1}^l o_{ij}$

▼ Même formule que le test d'indépendance / d'homogénéité !

▼ Degrés de liberté  $\nu = (2 - 1)(c - 1) = c - 1$

▼ Conditions : OK (sinon ? augmenter les tailles des échantillons !)

▼ Calculer  $\chi^2 = 6.2339$

▼  $\nu = (3 - 1) = 2$

▼ p-value :  $P(X^2 > 6.2339) =$

`pchisq( 6.2339, df=2, lower.tail=FALSE ) = 0.04429`

▼ On peut rejeter  $H_0$  au seuil de signification 5%

▼ Commande R :

`oui.non = rbind(c(45, 55, 70), c(905, 890, 870))`

`chisq.test( oui.non )`

ou, pour plus d'informations :

`oui = c( 45, 55, 70 ); essais = c( 950, 945, 940)`

`prop.test( oui, essais )`

153

### Test de proportions sans estimation de paramètres

Même contexte qu'avant :  $c$  populations,  $c$  échantillons, caractère  $X$  à deux modalités.

$H_0$  : les proportions de « oui »,  $\pi_1, \dots, \pi_c$ , sont égales à  $p_1, \dots, p_c$  (pas d'estimation de paramètres).

- ▼ « Oui » :  $\pi_j = p_j \rightarrow \frac{e_{1j}}{n_j} = p_j$
- ▼ « Non » :  $1 - \pi_j = 1 - p_j \rightarrow \frac{e_{2j}}{n_j} = 1 - p_j$
- ▼  $\nu = c$  : on ne perd aucun degré de liberté
- ▼ Exemple précédent avec :  
 $p_1 = 0.05, p_2 = 0.06, p_3 = 0.08$  ( $\neq 170/2835 \approx 0.06$ )
- ▼ Calculer  $\chi^2 = 0.5836$
- ▼  $\nu = 3$
- ▼ p-value :  $P(X^2 > 0.5836) = 0.9002$
- ▼ On ne peut pas rejeter  $H_0$
- ▼ Commande R :  
`prop.test( oui, essais, p=c(0.05, 0.06, 0.08) )`

154

### Test d'adéquation à la loi normale (Shapiro–Wilk)

$H_0$  : les données expérimentales (échantillon de taille  $n$ ) ont été obtenues à partir d'une population normale.

- ▼ Procédure « classique » : test du  $\chi^2$  (cf. TD 5)
  1. Répartir les données en classes (histogramme)
  2. Estimer  $\mu$  et  $\sigma$  avec `qqnorm`
  - 3a. Calculer les probabilités théoriques  $p_j$  des classes  
Calculer les fréquences théoriques  $e_j = p_j n$   
Vérifier les conditions sinon regrouper les classes
  - 3b. Ou répartir en  $(M + 1)$  classes équiprobables :  $e_j = n/(M + 1)$
  4. Calculer  $\chi^2$  (on perd deux d.l. avec l'estimation de  $\mu$  et  $\sigma$  !)
- ▼ Procédure spécifique : test de Shapiro–Wilk
- ▼ Commande R :  
`data = rnorm(100, mean=10, sd=2) % un exemple...`  
`shapiro.test( data )`
- ▼ Une grande p-value permet de ne pas rejeter l'hypothèse de normalité

155