

Über die Beziehung zwischen dem zweiten Hauptsatze des
mechanischen Wärmetheorie und der
Wahrscheinlichkeitsrechnung, respective den Sätzen über
das Wärmegleichgewicht.

On the relationship between the second main theorem of
mechanical heat theory and the probability calculation with
respect to the results about the heat equilibrium.

Von dem c. M. **Ludwig Boltzmann** in Graz
Sitzb. d. Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften,
mathematisch-naturwissen Cl. LXXVI, Abt II, 1877, pp. 373-435.

May 2, 2002

Contents

1	Die Zahl der lebendigen Kräfte ist eine discrete I. The number of the alive forces is a discrete	6
2	Die lebendigen Kräfte gehen continuirlich in einander über II. The alive forces exchange continuously into each other	26
3	III. Betrachtung mehratomiger Gasmoleküle und äusserer Kräfte. III. Analysis of (?) gas molecules of several atomes and outside forces.	38
4	IV. über die Bedingungen des Maximums des vom Potenzexponenten freien Productes aller Werte der die Zustands- verteilung bestimmende Function. IV. On the conditions of the maximum of all values of the power exponent free products of the Function determining the status distribution (???...).	44
5	V. Beziehung der Entropie zu derjenigen Grösse, welche ich als die Vertheilungs- wahrscheinlichkeit bezeichnet habe. V. Relationship of the entropy with that quantity, which I called the probability of distribution.	54

I have not found translations of this famous paper by Ludwig Boltzmann, one of those that have inspired Max Planck and Albert Einstein in their discovery of Quantum Mechanics* and Claude Shannon in the invention of Information Theory.

(* In the "Further studies", section II (Replacement of integrals by sums), Boltzmann has the following remark : "It would be difficult to imagine an apparatus that could regulate the collisions of two bodies in such a way that their kinetic energies after a collision are always multiples of ε "...)

I attempted one with the very appreciated help of <http://babelfish.altavista.com/tr> that gives rather acceptable results if one corrects the sentence organization and some words for instance with <http://dictionaries.travlang.com/GermanEnglish/> which is very useful for choosing among several meanings.

There are still many mistakes, nonsenses and wrong translations ; any correction would be welcome (send mail to leroux@essi.fr).

Translations of other papers by Boltzmann on this topic can be found in “Kinetic theory, vol. 2, by S. G. Brush, Pergamon Press, pp 88-175 (Further studies on the thermal equilibrium of gas molecules, 1872) and “Lectures on gas theory” 1896-1898, translation by S. G. Brush, University of California press, 1964.

Eine Beziehung des zweiten Hauptsatzes zur Wahrscheinlichkeitsrechnung zeigte sich zuerst, als ich nachwies, dass ein analytischer Beweis desselben auf keiner anderen Grundlagemöglich ist, als auf einer solchen, welche der Wahrscheinlichkeitsrechnung entnommen ist.

(Verg. meine Abhandlung "Analytischer Beweis des zweiten Hauptsatzes der mechanischen wärmetheorie aus den Sätzen über das Gleichgewicht der lebendigen Kraft", diese Sitzungsber. bd. 58, seite 8 des Separatabdruckes.

Ferner meine Bemerkungen über einige Probleme der mechanischen Wärmetheorie, III. Abschnitt.)

Diese Beziehung erhielt eine weitere Bestätigung durch den Nachweis, dass ein exacter Beweis der Sätze über Wärmegleichgewicht am leichtesten dadurch gelingt, dass man nachweist, dass eine gewisse Grösse, welche ich wiederum mit E bezeichnen will, in Folge des Austausches der lebendigen Kraft unter den Gasmolekülen nur abnehmen kann, und daher für den Zustand des Wärmegleichgewichtes ihren Minimumwerth hat.

Vergleiche meine weiteren studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen

Noch klarer tritt der Zusammenhang zwischen dem zweiten Hauptsatze und den Sätzen über Wärmegleichgewicht hervor durch die Entwicklungen im II. Abschnitte meiner "Bemerkungen über einige Probleme der mechanischen Wärmetheorie".

Daselbst habe ich auch zuerst die Möglichkeit einer ganz eigenthümlichen Berechnungsweise des Wärmegleichgewichtes erwähnt, und zwar mit folgenden Worten

"Es ist klar dass jede einzelne gleichförmige Zustandsvertheilung, welche bei einem bestimmten Anfangszustande nach Verlauf einer bestimmten Zeit entsteht, ebenso unwahrscheinlich ist, wie eine einzelne noch so ungleichförmige Zustandsvertheilung, grade so wie im Lottospiele jede einzelne Quinterne ebenso unwahrscheinlich ist, wie die quinterne 12345.

Nur daher, dass es weit mehr gleichförmige als ungleichförmige Zustandsvertheilungen gibt, stammt die grössere Wahrscheinlichkeit, dass die Zustandsvertheilung mit der Zeit gleichförmig wird.

A relationship between the second main theorem with the probability calculation is showed up first, where I show that an analytic proof of the this theorem is basically possible on no other basis, than the probability calculation.

(see my paper "analytic proof of the second main theorem of the mechanical warming theory based on the results about the equilibrium of the alive force", these proceedings. bd. 58, page 8 of the separate printing.

Further, my remarks over some problems of the mechanical heat theory, III. paragraph.)

This relationship receives a further confirmation by showing that a more correct proof of the theorems on warming equilibrium is obtained most easily since one proves that a certain quantity, which I want to name again E can only decrease during the exchange of the alive force among the gasmolecules, and therefore gets its minimum value for the warming equilibrium.

refer to my "further studies" of the warming equilibrium among gasmolecules"

Still more clearly appears the connection between the second main record and the results on heat equilibrium by the developments in IIth paragraph of my " remarks over some problems of the mechanical heat theory "

There I mentioned also first the possibility of a quite eigenthuemlichen (?) method of calculation of the warming equilibrium, with the following words

"It is clear that each individual homogeneous state distribution, which develops from a certain initial condition after a certain processing time is just as improbable, as any other state distribution just like in Lotto-plays, each individual quintet is just as improbable as the quintet 12345.

Only since there are far more homogeneous than unhomogeneous state distribution , with the time the probability becomes larger that the state distribution becomes homogeneous."

Ferner : Man könnte sogar aus dem Verhältnisse der Zahl der verschiedenen Zustandsbertheilungen deren Wahrscheinlichkeit berechnen, was vielleicht zu einer interessanten Methode der Berechnung des Wärmegleichgewichtes führen würde."

Es ist also damit ausgesprochen, dass man den Zustand des Wärmegleichgewichtes dadurch berechnen kann, dass man die Wahrscheinlichkeit der verschiedenen möglichen Zustände des Systems aufsucht.

Der Anfangszustand wird in den meisten Fällen ein sehr unwahrscheinlicher sein, von ihm wird das System immer wahrscheinlicheren Zuständen zueilen, bis es endlich den wahrscheinlichsten, d. h. den des Wärmegleichgewichtes, erreicht hat.

Wenden wir dies auf den zweiten Hauptsatz an, so können wir diejenige Grösse, welche man gewöhnlich als die Entropie zu bezeichnen pflegt, mit der Wahrscheinlichkeit, des betreffenden Zustandes identifizieren.

Denken wir uns ein System von Körpern, welche für sich isoliert und nicht mit andern Körpern in Wechselwirkung sind, z. b. einen Körper von höherer und einen von niedrigerer Temperatur und einen sogenannten Zwischenkörper welcher die Wärmeübertragung zwischen beiden vermittelt, oder um ein anderes beispiel zu wählen, ein Gefäss mit absolut glatten und starren Wänden, dessen eine Hälfte mit Luft von geringerer Temperatur oder Spannung, dessen andere Hälfte mit Luft von höherer Temperatur oder Spannung erfüllt ist.

Das system von Körpern, welches wir uns gedacht haben, habe zu anfang der Zeit irgend einen Zustand ;

Durch die Wechselwirkung der Körper verändert sich dieser Zustand ;

gemäss dem zweiten Hauptsatze muss diese Veränderung immer so geschehen, dass die gesammte Entropie aller Körper zunimmt

Nach unserer gegenwärtigen Interpretation heisst dies nichts anderes, als die Wahrscheinlichkeit des Gesamtzustandes aller dieser Körper wird immer grösser

Das System von Körpern geht stets von einem unwahrscheinlicheren zu einem wahrscheinlicheren Zustände über.

Wie dies gemeint ist, wird später noch deutlicher hervortreten.

further: "one could calculate even from the ratios of the number of the different state distributions their probability, what perhaps could lead to an interesting method of the calculation of the warming equilibrium."

It is expressed thus with this, that one can calculate the state of warming equilibrium in looking up the probability to the different possible states of the system .

The initial condition will in most cases be very more improbable, then the system comes to an ever more probable state and at last achieves the most probable, i.e. that of the warming equilibrium.

If we apply this to the second main theorem , then we can identify that quantity, which one tends to call normally the entropy, with the probability, of the concerned state.

We imagine a system of bodies, which is for itself isolated and not in interaction with other bodies, e.g. a body of higher and one of lower temperature and a so-called intermediate body which mediated the heat transfer between both, or in order to select another example a container with absolutely smooth and rigid walls, its one half with air of smaller temperature or tension(???), the other half is fulfilled with air by higher temperature or tension(???) .

The system of bodies, which we imagined, was in any possible state at the beginning of time.

This state is modified by the interaction of the bodies.

In accordance with the second main theorem, this modification must occur always in such a way that the cumulative entropy of all bodies increases.

According to our present interpretation this says nothing different that the probability of the global state of all these bodies continues to increase.

The system of bodies goes always from a more improbable to a more probable state.

How this is meant will appear later still more clearly.

Nach dem Erscheinen meiner letzten Abhandlung über diesen Gegenstand wurde vollkommen unabhängig von mir dieselbe Idee von Herrn Oskar Emil Meyer aufgenommen und weiter entwickelt, indem derselbe die Gleichungen meiner weiteren Studien über das Wärmegleichgewicht materieller Punkte in der in Rede stehenden Weise zu interpretiren sucht.

Mir ist jedoch die Schlussweise Herrn Meyer's keineswegs klar geworden, und ich will auf meine Bedenken gegen dieselbe auf Seite 9 zurückkommen.

Wir müssen hier einen ganz andern Weg einschlagen, da es unser Hauptzweck ist, nicht beim Wärmegleichgewichte stehen zu bleiben, sondern die Beziehungen dieser Wahrscheinlichkeitssätze zu dem zweiten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie zu erforschen

Wir wollen da zunächst das Problem lösen, welches ich in den oben citirten Worten meiner "Bemerkungen über einige Probleme der mechanischen Wärmetheorie" bereits klar definirt habe, nämlich das Problem "aus dem Verhältnisse der Zahl der verschiedenen Zustandsvertheilungen, deren Wahrscheinlichkeit zu berechnen.

Wir wollen da zuerst einen thunlichst einfachen Körper der Betrachtung unterziehen, nämlich ein von festen absolut elastischen Wänden eingeschlossenes Gas, dessen Moleküle harte, absolut elastische Kugeln sind.

Oder Kraftcentra, welche nur, wenn ihre Entfernung kleiner als eine gewisse Grösse geworden ist, nach einem übrigens beliebigen Gesetze, sonst aber gar nicht auf einander wirken ;

Die letztere Annahme, welche die erstere als speciellen Fall enthält, verändert die Rechnung nicht im Mindesten

Selbst in diesem Falle ist die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung keine leichte.

Die Anzahl der Moleküle ist zwar nicht im mathematischen Sinne unendlich, aber doch überaus gross.

Die Zahl der verschiedenen Geschwindigkeiten dagegen, deren jedes Molekül fähig ist, muss als mathematisch unendlich gross gedacht werden.

After the publication of my last paper on this subject, Mr. Oskar Emil Meyer continued to develop the same idea perfectly independently of me, by seeking to interpret the equations of my further studies over the warming equilibrium of material points that were in my talk (???)

However the way of Mr. Meyer to the conclusion did not become by any means clear to me, and I want to return to my doubts against his approach on page 9.

We must take a quite different way here, in order to investigate since our principal purpose being not to remain with heat equilibrium but to consider the relations between the probabilities and the second main theorem of the mechanical heat theory

First we want to solve here the computation problem, which I defined already clearly in the words mentioned above of my "remarks over some problems of the mechanical heat theory", i.e. the problem "of computing the probability of the different state distributions from the ratios (???) on the number of these different state distribution".

We want here to consider first the most simple case (???) : a simple body, i.e. a gas, whose molecules are hard, absolutely flexible balls inclosed by fixed absolutely flexible walls.

Or force centers, which however affect not at all each other otherwise than according to given rules (???), if their distance becomes smaller than a certain size, ;

The latter acceptance, which contains the first as special case, changes the calculation by no means

Even in this case the application of the probability calculation is not easy.

The number of molecules is not in the mathematical sense infinite, but nevertheless extremely large.

On the contrary, the number of the different velocities, each molecule can have, must be thought as mathematically infinitely large .

Da namentlich der letztere Umstand die Rechnung sehr erschwert, so will ich im ersten Abschnitte dieser Abhandlung behufs leichteren Verständnisses des Folgenden den Grenzübergang in einer Weise bewerkstelligen, wie ich es schon in früheren Abhandlungen öfters gethan habe

(z. B. in den weiteren Studien).

Since in particular the latter circumstance makes the calculation much more difficult, then for(?) easier understanding of the sequel I want in first paragraph of this paper to explain how we get the transition to the limit (???), like I have already repeatedly done in earlier papers

(e.g. in the further studies).

1 Die Zahl der lebendigen Kräfte ist eine discrete

I. The number of the alive forces is a discrete

Wir wollen zunächst annehmen, jedes Molekül sei nur im Stande, eine bestimmte endliche Anzahl von Geschwindigkeiten anzunehmen, z. B. die Geschwindigkeiten

$$0, \frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \frac{3}{q}, \dots, \frac{p}{q},$$

wobei p und q beliebige endliche Zahlen sind.

beiden zusammenstossenden Molekülen ein Austausch der Geschwindigkeiten stattfinden, jedoch so, dass nach dem Zusammenstosse jedes der beiden Moleküle immer wieder eine der oben angeführten Geschwindigkeiten, entweder

$$0, \quad \text{or} \quad \frac{1}{q}, \frac{1}{q} \quad \text{or} \quad \frac{2}{q} \quad \text{etc. till} \quad \frac{p}{q}$$

besitzt.

Es entspricht diese Fiction freilich keinem realisirbaren mechanischen Probleme, wohl aber einem Probleme, welches mathematisch viel leichter zu behandeln ist, und welches sofort wieder in das zu lösende Problem übergeht, wenn man p und q ins Unendliche wachsen lässt.

Wenn auch diese Behandlungsweise des Problems auf den ersten Anblick sehr abstract zu sein scheint, so führt sie doch bei dertartigen Problemen, meistens am raschesten zum Ziele, und wenn man bedenkt, dass alles Unendliche in der Natur niemals etwas Anderes als einen Grenzübergang bedeutet, so kann man die unendliche Mannigfaltigkeit von Geschwindigkeiten, welche jedes Molekül anzunehmen im Stande ist, gar nicht anders auffassen, es sei denn als den Grenzfall, welcher eintritt, wenn jedes Molekül immer mehr und mehr Geschwindigkeiten annehmen kann

Wir wollen jedoch vorläufig statt der Geschwindigkeit der Moleküle deren lebendige Kraft einführen.

We want to assume first, each molecule is only in the status to take a certain finite number of velocities e.g. the velocities

whereby p and q are any finite numbers.

At the collision between two molecules an exchange of the velocities is to take place, however so that after the collision between the two colliding molecules each of the two molecules takes only one of the velocities stated above. either

This assumption certainly does not corresponds to any realistic mechanical problems, but to problems, that can be treated mathematically much more easily, and which changes immediately again into the problem to be solved, if one lets p and q grow to infinite.

Even if this way of treatment of the problem seems to be very abstract on the first sight, it leads nevertheless much more rapidly to the conclusion for this problem, and if one considers that all infinities in nature never mean anything else than a limit case, then one can understand the infinite diversity of velocities, which each molecule can take, not at all differently, as the limit, which appears, if each molecule always can take more and more velocities.

We want to introduce however for the time being instead of the velocities of the molecules their alive force.

Jedes Molekül soll nur im Stande sein, eine endliche Anzahl verschiedener lebendiger Kräfte anzunehmen. Zu noch grösserer Vereinfachung nehmen wir an, dass die Reihe der lebendigen Kräfte, welche jedes Molekül anzunehmen im Stande ist, eine arithmetische Progression bildet, z. B. folgende :

$$0, \varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon, \dots p\varepsilon.$$

Die grösste mögliche lebendige Kraft $p\varepsilon$ wollen wir mit P bezeichnen.

Vor dem Stosse soll jedes der beiden zusammenstossenden Molekül entweder die lebendige Kraft

$$0, \text{ or } \varepsilon, \text{ or } 2\varepsilon \text{ etc. } \dots p\varepsilon,$$

haben, und durch irgend eine Ursache soll bewirkt werden, dass auch nach dem Zusammenstosse niemals irgend eines der zusammenstossenden Moleküle eine in obiger Reihe nicht enthaltene lebendige Kraft annimmt.

Die Anzahl der Moleküle in unserem Gefässe sei n .

Wenn wir wissen, wie viele von diesen n molekülen die lebendige Kraft Null, wie viele die lebendige Kraft ε u. s. w. besitzen, so sagen wir :

Die Vertheilung der lebendigen Kraft unter den Molekülen, oder die Zustandsvertheilung is uns gegeben

Wenn zu Anfang der Zeit irgend eine Zustandsvertheilung unter den Gasmolekülen geherrscht hat, so wird sich dieselbe im Allgemeinen durch die Zusammenstösse verändern.

Die Gesetze, nach denen diese Veränderung vor sich geht, sind schon oft Gegenstand der Untersuchung gewesen.

Ich bemerke jedoch sogleich, dass dies jetzt gar nicht meine Absicht ist, sondern ich will jetzt ganz unabhängig davon, ob und wie eine Zustandsbertheilung entstanden ist, deren Wahrscheinlichkeit prüfen, oder, genauer ausgedrückt, ich will alle Combinationen aufsuchen, welche bei Vertheilung der $p+1$ lebendigen Kräfte unter die n Moleküle möglich sind, und dann prüfen, wie viele dieser Combinationen einer jeden Sustandsvertheilung entsprechen.

Letztere Zahl bestimmt dann die Wahrscheinlichkeit der betreffenden Zustandsvertheilung, genau so wie ich es an der bereits citirten Stelle meiner "Bemerkungen über einige Probleme der mechanischen Wärmethorie z (Seite 10 des Separatabdruckes) ausspreche.

Each molecule is to be only in the status to take a finite number of different alive forces. For still larger simplification we assume that the values of the alive forces, which each molecule can take form an arithmetic progression, e.g. the following:

We want to name P the largest possible alive force $p\varepsilon$.

Before the impact each of both colliding molecules has either the alive force

and by a possible cause, after the collision one of the colliding molecules never possibly can take an alive force that is not contained in above series.

The number of molecules in our container is n .

If we know, how many of these n molecules possess the alive force zero, how many the alive force ε etc. , then we say:

The distribution of the alive force among the molecules, or the state distribution is given to us.

If at the beginning of the time a possible state distribution among the gasmolecules prevailed, then this distribution will generally be changed by the collisions.

The laws, according to which this modification takes place, were already often the subject of my investigation

I notice however immediately that this is not at all my intention now , but I want now quite independently of whether and how a state distribution developed, establish their probabilities , or, more exactly expressed, I want to consider all combinations, that can be obtained in distributing the $p + 1$ alive forces among the n molecules , and then to check, how many of these combinations correspond to each state distribution.

The last number then certainly expresses the probability of the state distribution concerned, exactly as I already mentionned in my "remarks over some problems of the mechanical heat theory" (page 10 of the separate printing)

Wir wollen also vorläufig an Stelle des zu behandelnden Problems ein rein schematisches setzen.

Wir nehmen an, wir hätten n Moleküle.

Jedes derselben sei im Stande, die lebendige Kraft

$$0, \varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon, \dots p\varepsilon$$

anzunehmen, und zwar sollen diese lebendigen Kräfte auf alle mögliche Weise unter den n Molekülen vertheilt werden, jedoch so, dass die Gesamtsumme der lebendigen Kraft aller Moleküle immer dieselbe, z. B. gleich $\lambda\varepsilon = L$ ist.

Jede solche Vertheilungsweise, wobei das erste Molekül eine bestimmte, lebendige Kraft, z. B. 2ε , das zweite wieder eine bestimmte, z. B. 6ε u. s. w. bis zum letzten Moleküle hat, wollen wir eine Complexion nennen, und zwar versinnlichen wir uns jede einzelne Complexion leicht dadurch, dass wir der Reihe nach die (bequemlichkeitshalber durch ε dividirten) Zahlen aufschreiben, welche die lebendigen Kräfte der einzelnen Moleküle angeben.

Wir fragen nun nach der Anzahl B der Complexionen, in denen w_0 Moleküle die lebendige Kraft Null, w_1 Molekülen die lebendige Kraft ε , w_2 die lebendige Kraft 2ε u. s. w. $\dots w_p$ die lebendige Kraft $p\varepsilon$ besitzen.

Wir sagten früher, wenn uns gegeben ist, wie viele Moleküle die lebendige Kraft Null, wie viele die lebendige Kraft ε u. s. w. besitzen, so ist damit die Zustandsvertheilung unter den Molekülen bestimmt ;

wir können also sagen :

Die Zahl B gibt an, wie viele Complexionen einer Zustandsvertheilung entsprechen, bei welcher w_0 Moleküle die Kraft Null w_1 die lebendige Kraft ε u. s. w. besitzen ;

oder sie bestimmt die Wahrscheinlichkeit jener Zustandsvertheilung.

Dividiren wir nämlich die Zahl B durch die Anzahl aller möglichen Complexionen, so bekommen wir die Wahrscheinlichkeit jener Zustandsvertheilung.

Da es bei der Zustandsvertheilung nicht darauf ankommt, welche, sondern bloss wie viele Moleküle eine bestimmte lebendige Kraft besitzen, so können wir eine Zustandsvertheilung dadurch versinnlichen, dass wir zuerst so viele (w_0) Nullen schreiben, als Moleküle die lebendige Kraft Null haben, dann so viele (w_1) Einser, als Moleküle die lebendige Kraft ε haben u. s. w. Alle diese Nullen, Einser etc. wollen wir die Elemente der betreffenden Zustandsvertheilung nennen.

Thus we want to set provisionally a purely schematic problem in place of the one which has to be treated.

We assume, we would have n molecules.

Each of them is assumed in the status to take the alive force

These alive forces are to be distributed in all possible ways under the n molecules, however so that the total sum of the alive force of all molecules is always the same, e.g. alike $\lambda\varepsilon = L$.

We want to call a "complexion" every distribution, in which the first molecule has a certain alive force, e.g. 2ε , the second again a certain, e.g. 6ε etc. up to last molecules, thereby we characterize (?) easily each individual complexion that we note in the sequel (for the sake of comfort divided by ε) by the numbers by which the alive forces of the individual molecules indicate themselves .

We ask now for the number B of the complexions, where w_0 molecules possess the alive force zero, w_1 molecules the alive force ε , w_2 the alive force 2ε etc. $\dots w_p$ the alive force $p\varepsilon$.

We said earlier, if is given to us, how many molecules possess the alive force zero, how many the alive force ε and s. w., then there is thereby a certain state distribution among the molecules;

we can say thus:

The number B indicates how many complexions correspond to a state distribution where w_0 molecules possess the alive force zero w_1 the alive force ε etc. ;

or it determines the probability of those state distributions

If we divide the number B by the number of all possible complexions, then we get the probability of those state distributions.

Since it does not depend on the state distribution, but only on how many molecules possess a certain alive force, then we can characterize a state distribution in writing first as many (w_0) zeros, as there are molecules having the alive force zero, then as many (w_1) ones, as molecules having the alive force ε etc.; we want to call all these zeros, ones etc. the items of the concerned state distribution .

Est ist jetzt unmittelbar klar, dass die Zahl B für jede Zustandsvertheilung genau gleich ist der Anzahl der Permutationen, deren die Elemente der Zustandsvertheilung fähig sind, weshalb wir die Zahl B immer als die Permutabilität der betreffenden Zustandsvertheilung bezeichnen wollen.

It is now directly clear that the number B for each state distribution is exactly alike to the number of permutations, whose are able the items of the state distribution, therefore we want to always call the number B the permutability of the concerned state distribution.

Denn denken wir uns einmal alle möglichen Complexionen aufgeschrieben, und dann auch alle möglichen Zustandsvertheilungen, so werden sich die letzteren bloss dadurch von den ersteren unterscheiden, dass es bei ihnen gleichgiltig ist, an welchem Platze die Zahlen stehen.

Then we imagine that all possible complexions are noted, and also all possible state distributions, then the latters will only differ from the first that for them, the position(?) where the numbers are, is indifferent.

Alle diejenigen Complexionen, welche die gleiche Anzahl von Nullen, die gleiche Anzahl von Einsern etc. enthalten, und sich von einander bloss durch die Anordnung der Elemente unterscheiden, werden eine und dieselbe Zustandsvertheilung liefern,

All those complexions, which contain the same number of zeros, the same number of ones etc., differ from each other bare by the arrangement of the items, and will supply the same state distribution

Die Anzahl der Complexionen, welche einer und derselben Zustandsvertheilung entsprechen, und welche wir mit B bezeichnet haben, muss also gleich der Anzahl der Permutationen sein, deren die Elemente der Zustandswertheilung fähig sind

The number of complexions, which correspond to the same statedistribution and which we named B , must be thus equal to the number of permutations that can be obtained from these items of the statedistribution

Um ein ganz einfaches Zahlenbeispiel zu geben, sei $n = 7, \lambda = 7, p = 7$, daher $L = 7\varepsilon, P = 7\varepsilon$ d. h. es seien 7 Moleküle vorhanden, unter denen die 8 lebendigen Kräfte $0, \varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon, 4\varepsilon, 5\varepsilon, 6\varepsilon, 7\varepsilon$ auf alle mögliche Weise, jedoch so zu vertheilen sind, dass die Summe der lebendigen Kraft aller Moleküle $= 7\varepsilon$ ist.

In order to give a quite simple numerical example, take $n = 7, \lambda = 7, p = 7$, therefore $L = 7\varepsilon, P = 7\varepsilon$ i.e. there are available 7 molecules, among which the 8 alive forces $0, \varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon, 4\varepsilon, 5\varepsilon, 6\varepsilon, 7\varepsilon$ are to be distributed in all possible way, however in such a way that the total of the alive force of all molecules is $= 7\varepsilon$.

Es sind dann 15 Zustandsvertheilungen möglich.

There are then 15 possible statedistributions

Versinnlichen wir jede derselben in der oben angegebenen Weise, so ergibt sich die in der zweiten Colonne der folgenden Tabelle aufgeführte Reihe von Zustandsvertheilungen.

Doing everything the in the same way as indicated above, then we obtain in the second column of the following table the specified series of states distribution.

Die Zahlen der ersten Colonne numeriren die verschiedenen Zustandsvertheilungen.

The numbers of the first column enumerate the different state distributions.

		B
1.	0000007	7
2.	0000016	42
3.	0000025	42
4.	0000034	42
5.	0000115	105
6.	0000123	210
7.	0000133	105
8.	0000223	105
9.	0001114	140
10.	0001123	420
11.	0001222	140
12.	0011113	105
13.	0011122	210
14.	0111112	42
15.	1111111	1

REMARK: Die Zustandsvertheilungen sind so geordnet, dass die Ziffern jeder vorhergehenden Horizontalreihe als Zahl ausgesprochen eine kleinere Zahl liefern, als die der nachfolgenden.

In der letzten Column ist unter der Rubrik B jeder Zustandsvertheilung die Anzahl der Permutationen beigefügt, deren ihre Elemente fähig sind, also die mit B bezeichnete Zahl.

Die erste Zustandsvertheilung, z. B. ist dadurch characterisirt, dass 6 Molekülen die leb. Kraft Null, einem die leb. Kraft 7ε zukommt, d. h. , dass $w_0 = 6, w_7 = 1, w_2 = w_3 = w_4 = w_5 = w_6 = 0$ ist

parbox7cm Welches der Molekuele die lebendige Kraft 7ε hat, ist dabei gleichgueltig.

Which of the molecules has the alive force 7ε , is thereby unimportant.

Alle moeglichen Complexionene, welche dieser Zustandsvertheilung entsprechen, sind daher 7 an der Zahl

Bezeichnen wir die Gesamtzahl aller Complexionen, also in unserem Falle die Zahl 1716 durch J, so ist also die Wahrscheinlichkeit der ersten Zustandsvertheilung $\frac{7}{J}$;

ebenso ist die Warscheinlichkeit der zweiten Zustandsvertheilung $\frac{42}{J}$;

Am groessten ist dei Wahrscheinlichkeit der zehnten Zustandsvertheilung, da sich ihre Elemente am öftesten permutiren lassen.

Wir koennen die Groesse welche wir die Wahrscheinlichkeit einer Zustandsvertheilung genannt haben, und welche wir künftighin mit einen einzigen Worte als die Vertheilungswahrscheinlichkeit bezeichnen wollen, auch noch in einer andern Weise definiren, welche wir sogleich an dem eben gewählten Zahlenbeispiele klar machen wollen, da dann ihre Verallgemeinerung selbstverständlich ist.

REMARK: The state distribution is arranged in such a way that the digits of each preceding horizontal series expressed as number supply a smaller number than the following.

In the last column is listed under caption B the number of permutations in each state distribution , whose items can be thus named by number B.

For exemple, the first state distribution is thereby characterised, that 6 molecules have alive force zero, one the alive force 7ε so that $w_0 = 6, w_7 = 1, w_2 = w_3 = w_4 = w_5 = w_6 = 0$

All possible complexions, which correspond to this state distribution, amount therefore to 7 .

If we define the total sum of all complexions, thus in our case the number 1716 by J, then the probability of the first state distribution is thus $\frac{7}{J}$;

Likewise the probability of the second state distribution is $\frac{42}{J}$;

The probability of the tenth state distribution is the largest, since most of the times their items are unchanged (?) by permutation .

We know that the quantity which we have called the probability of a state distribution, and which we want to name with only one word as the distribution probability in the future, can be defined still in another way, which we want to make immediately clear through selected numerical examples, since then their generalization is natural.

Wir nehmen an, wir hätten eine Urne, in der sich unendlich viele Zetteln befinden. Auf jedem Zettel steht eine der Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7;

und zwar steht jede Zahl auf gleich viel Zetteln und ist die Wahrscheinlichkeit gezogen zu werden für jeden Zettel dieselbe.

Wir ziehen nun 7 Zettel und notiren die auf ihnen geschriebenen Zahlen, welche uns die erste Septerne bilden.

Diese Septerne stellt uns zugleich eine Zustandsvertheilung unter den Molekülen dar, indem wir dem ersten Moleküle eine lebendige Kraft ertheilen, welche gleich der mit ε multiplicirten Zahl ist welche auf dem zuerst gezogenen Zettel aufgeschrieben stand, und ebenso den uebrigen Molekuelen.

Nun geben wir die Zettel in die Urne zurück und ziehen wieder 7 Zettel ;

die jetzt gezogenen Zahlen bilden die zweite Septerne, welche das Bild einer zweiten Zustandsvertheilung ist u. s. w.

Nachdem wir ausserordentlich viele Septernen gezogen haben, verwerfen wir davon alle, bei welchen die Summe der gezogenen Zahlen nicht = 7 ist.

Die Zahl der noch übrigen Septernen wird noch immer ausserordentlich gross sein.

Da bei jedem Zuge jede der Zahlen dieselbe Wahrscheinlichkeit hat, so wird unter den gezogenen Septernen jede Complexion gleich oft vorkommen; denn wir betrachten zwei Complexionen als verschieden, sowohl wenn sie verschiedene Elemente, als auch wenn sie dieselben, Elemente in verschiedener Reihenfolge enthalten.

Ordnen wir dagegen in jeder Septerne die gezogenen Zahlen nach ihrer Grösse, so wird jede Septerne in eine der 15 in der obigen Tabelle enthaltenen übergehen.

Aber die Anzahl derjenigen Septernen, welche in 0000007 übergehen, wird sich zur Zahl derjenigen, welche in 0000016 übergehen, verhalten, wie die in der Rubrik *B* beigefügten Zahlen, also wie 7:42.

Ebenso bei allen anderen Septernen.

Als die wahrscheinlichste Zustandsvertheilung wird nun diejenige definirt werden müssen, in welche die meisten Septernen übergehen, also in diesem Beispiele die 10.

We assume, we would have an urn, in which infinitely many tickets are. On each ticket is one of the numbers 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7;

each number is on an equal amount of tickets and the probability of each ticket to be pulled is the same.

We pull now 7 tickets and note the numbers written on them, which gives us the first septentet .

At the same time, this septentet represents to us a statedistribution of the molecules , where there is a first molecule with an alive force, which is equal to ε multiplied by the number which is noted on the ticket pulled first , and likewise for the remaining molecules.

Now we return the notes into the urn and pull again 7 notes;

the numbers drawn now form the second septentet, which is the picture of a second state distribution etc.

After we pulled extraordinarily many septentets, we reject all those for which the total of the pulled numbers is not = 7.

The number of the still remaining septentets will be still extraordinarily large.

Since with each pulling, each of the numbers has the same probability, then in the pulled septentet each complexion will occur as often; because we regard two complexions as different, when both of them have different items, and if they contain the same items in different order.

If we arrange the pulled numbers in each septentet according to their value, then each septentet will change into one of the 15 contained in the table above.

But the number of that septentet, which change into 0000007, behaves for the number of those, which change into 0000016, like the numbers attached in the column *B*, thus like 7:42.

Likewise with all other septentets.

Now the most probable state distribution will have to be defined: it is the distribution into which most septentets are, thus into this examples the 10.

Remark :

Dividiren wir die Anzahl der Septernen, welche einer bestimmten Zustandsvertheilung entsprechen, durch die Anzahl aller Septernene überhaupt, so erhalten wir eben die Vertheilungswahrscheinlichkeit.

Statt diejenigen Septernen, deren Ziffersumme nicht 7 ist, zu verwerfen, können wir auch nach dem Zuge jedes Zettels alle diejenigen Zettel aus der Urne entfernen, welche, wenn sie gezogen wurden, bewirkten, dass die Ziffersumme der gezogenen Zahlen unmöglich 7 sein könnte, während wir alle andern Zettel unverändert in der Urne belassen.

Wäre z. B. auf den ersten Zug ein Sechser gezogen worden, so müssten alle Zettel aus der Urne entfernt werden, bis auf die mit 0 und 1 beschriebenen;

hätten die ersten 6 Züge Nullen geliefert, so würden nur die Siebener in der Urne belassen.

Noch eins sei an dieser Stelle bemerkt :

Bilden wir alle möglichen Complexionen. Bezeichnen wir mit \bar{w}_0 das arithmetische Mittel aller Werthe von w_0 , welche den verschiedenen Complexionen zukommen, und verstehen unter $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots$ ähnlich gebildete Ausdrücke, so eilen die Grössen $\bar{w}_0, \bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots$ Grenzen zu, welche ebenfalls zur richtigen Zustandsvertheilung führen würden.

Ich will hier einige Worte über die von Herrn Oskar Emil Meher in dem bereits citirten Buch angewendete Schlussweise einschalten.

Um zu suchen, welches Zustandsvertheilungsgesetz $F(u, v, w)$ das wahrscheinlichste sei, nimmt derselbe schon von vorneherein an, dass dieses Zustandsvertheilungsgesetz bereits unter den Molekülen existire.

Es ist dies der erste wesentliche Unterschied zwischen meiner Betrachtungsweise des Problems und der des Herrn Oskar Emil Meyer.

Bei Aufsuchung der wahrscheinlichsten Zustandsvertheilung nehme ich an, dass die lebendige Kraft jedes einzelnen Moleküls gewissermassen durch das Loos bestimmt wird, welches vollkommen unpartheisch aus einer Menge von Loosen gezogen wird, die alle überhaupt vorkommenden lebendigen Kräfte in vollkommen gleicher Zahl enthalten.

Herr Meyer dagegen nimmt an, wenn wir bei diesem Vergleiche stehen bleiben, dass schon unter den Lösen die erst zu bestimmende Geschwindigkeitsvertheilung besteht, und dass jedes Molekül eine gewisse lebendige Kraft um so eher bekommt, je wahrscheinlicher diese lebendige Kraft später wird.

If we divide the number of seventets, which correspond to a certain state distribution by the number of all seventets, then we get the distribution probability.

Instead of rejecting those seventets, whose sum of digits is not 7, we can also after the pulling of each ticket, remove all those tickets from the urn, which, if they were pulled, caused that the digit total of the pulled numbers could be not possibly 7, while we leave all other notes in the urn unchanged

e.g. on the first pulling if a sextet would have been pulled, then all notes would have to be removed from the urn, up to those described with 0 and 1 ;

if the first 6 pullings would have supplied zeros, then only the seventets were left in the urn

one more point is to be noted here:

We form all possible complexions. If we mark with \bar{w}_0 the arithmetic means of all values of w_0 , which come to the different complexions, and understand by $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots$ similarly formed expressions, then we the quantities $\bar{w}_0, \bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots$ hasten to boundaries too, which which likewise leads to the correct statedistribution.

I want to say some words here on the results by Mr. Oskar Emil Meyer in the book already mentionned

In order to look up, which statedistribution law $F(u, v, w)$ is the most probable, he assumes already from the beginning that this statedistribution law already exists among the molecules.

It is this the first substantial difference between my viewpoint of the problem and that of Mr. Oskar Emil Meyer

In the case of looking up for the most probable state distribution I assume that the alive force of each individual molecule is determined to a certain extent by the lot (?), which is perfectly evenly pulled from a quantity of lots , all the alive forces occurring being exactly in the same number.

if we remain with this comparison, Mr. Meyer on the contrary assumes already that among the lots, only exist those determining velocity distribution , and that if each molecule gets a certain alive force (?), the more probable this alive force becomes later.

Das Problem, welchem Herrn Meyer's Gleichungen entsprechen, müsste eher so definiert werden :

Es sei unter sehr vielen (M') Gasmolekülen irgend eine Geschwindigkeitsvertheilung $F(u, v, w)$.

Wir ziehen aus denselben ganz vom Zufall geleitet M Moleküle heraus, wobei M klein gegen M' , aber noch immer sehr gross ist.

ei welcher Wahl von $F(u, v, w)$ ist es am wahrscheinlichsten, dass unter den M Molekülen wieder dieselbe Geschwindigkeitsverheilung, wie unter M' Molekülen besteht.

Man sieht, dass das Problem ganz wesentlich verschieden von dem meinigen ist ;

dass Herr Meyer trotzdem zu demselben Resultate gelangen kann, kann ich mir nur durch eine Anzahl von Inconsequenzen erklären, welche mir bei seiner Auflösung des Problems vorzukommen scheinen.

Da Herr Meyer von der Wahrscheinlichkeit spricht, dass ein Molekül die Geschwindigkeitscomponenten haben, und es muss diese Anzahl jener Wahrscheinlichkeit proportional sein.

Es ist also das Product $F_1 F_2 F_3 \dots$, welches Herr Meyer auf Seite 262 entwickelt, so zu verstehen, dass darin jeder Factor mehrmals auftritt, und könnte auch so geschrieben werde

$$F_1^{kF_1} F_2^{kF_2} \dots$$

und dessen Logarithmus wäre :

$$k(F_1 \log F_1 + F_2 \log F_2 + \dots)$$

Man sieht, dass diese Grösse bis auf den unwesentlichen Umstand, dass ich dort die lebendige Kraft statt der Geschwindigkeitscomponenten eingeführt habe, vollkommen übereinstimmt mit der von mir schon in meinem "weiteren Studien" mit E bezeichneten Grösse, auf deren Minimumeigenschaft mein Beweis des Wärmegleichgewichtes basirt (vergleiche auch denjenigen Theil meiner Abhandlung "über das Wärmegleichgewicht von Gasen, auf welche äussere Kräfte wirken", welcher unmittelbar dem Anhang vorhegeht).

The problem, which correspond to Mr. Meyer's equations, would rather have to be defined in such a way:

There is possibly a velocity distribution $F(u, v, w)$ among very many (M') gas molecules .

We pull M molecules out of the set at random, whereby M is small against M' , but still very large.

With this selection of $F(u, v, w)$ is it most probable that there is the same velocity distribution among the M' molecules as among the M molecules again .

One sees that the problem is quite substantially different from the mine (?);

That Mr. Meyer can arrive nevertheless at the same results, I can explain only by a number of inconsequences that occur in his solution of the problem.

Since Mr. Meyer speaks of the probability that a molecule has a velocity component , and their number must be proportional to that probability.

Thus the Product $F_1 F_2 F_3 \dots$, which Mr. Meyer developed on page 262, could also be written in such a way to thus understand that therein each factor occurs several times, and is

and its logarithm would be:

One sees the fact that this quantity corresponds perfectly up to the insignificant point to the quantity already named E in which I introduced the alive force instead of the velocity components, in my " further studies ", on whose minimum characterisation is based my proof of the heat equilibrium (see also that part, which foregoes directly the appendix, of my paper " on the heat equilibrium of gases, which outside forces affects ".

Producte behauptet, es sei ein Maximum, während in meinen Rechnungen diese Grösse E ein Minimum ist, und wir in der That später sehen werden, dass die Wahrscheinlichkeit einer Zustandsvertheilung nicht ihr, sondern ihrem reciproken Werthe proportional ist.

Diese Nichtübereinstimmung hängt mit einer ganz eigenthümlichen Behandlungsweise des Problems durch Herrn Meyer zusammen, welche mir, wenn ich nicht überhaupt über das ganze Ziel der Meyer'schen Rechnungen im Irrthume bin, Verstösse gegen die Regel der Differentialrechnung zu enthalten scheint.

Während er nämlich die Function F sucht, deren Werth also der variation unterworfen werden sollte, unterwirft er die Grössen u, v, w der Variation, welche, wie mir scheint, die Rolle der independent Variablen spielen sollten.

Die durch Nullsetzung der Coefficienter der Variationen entstehenden Gleichungen sollten nach den Regeln der Differentialrechnung zur Bestimmung der Werthe derjenigen Variablen verwendet werden, welche früher der Variation unterworfen worden sind.

Herr Meyer dagegen benützt sie als Differentialgleichungen zur Bestimmung der Function F . In der That komme ich zu einem ganz anderen, gar keiner bestimmten Limite zueilenden Resultate, wenn ich nach den Regeln der Differentialrechnung die Function F so zu bestimmen suche, dass das keine Potenzen enthaltende Product $F_1 F_2 F_3 \dots$ ein Maximum wird, während gleichzeitig die vier Ausdrücke :

$$\Sigma u, \Sigma v, \Sigma w, \Sigma \frac{u^2+v^2+w^2}{2}$$

constant sein müssen.

(Vergl. den 4. Abschnitt dieser Abhandlung.)

Noch eins muss ich erwähnen.

Seien M' Moleküle gegeben.

Die Zahl derjenigen davon, welche die Geschwindigkeitscomponenten u_1, v_1, w_1 haben, soll sich zur Zahl der Moleküle mit den Geschwindigkeitscomponenten u_2, v_2, w_2 verhalten wie F_1 zu F_2 .

Analoge Bedeutungen sollen F_3, F_4 u. s. w. haben.

But it is noticeable immediately that Mr. Meyer states that this product is a maximum, while in my calculations this quantity E is a minimum, and we will see later indeed that the probability of a state distribution is not proportional to it, but to its reciprocal quantity (?).

This discrepancy is connected with a quite eigenthümlichen (?) way of treatment of the problem by Mr. Meyer, who seems to contain, if I am not over-struck by the in the error of whole target of the Meyer' calculations, offences against the rule of differential calculus.

While he considers the function F , whose value should be subjected thus to the variation, he subjects the quantities u, v, w to the variation, while, as seems to me, they should play the role of independent variables.

The equations resulting from zero-setting of the coefficients of the variations should be used according to the rules of differential calculus for the determination of the values of those variables, which were subjected previously to the variation.

Mr. Meyer on the contrary, uses it as differential equations for the determination of that function F . Indeed I come to a quite different results, hastening (?) to no definite limite, if I try to determine the function F according to the rules of differential calculus in such a way that that no product $F_1 F_2 F_3 \dots$ containing powers becomes a maximum, while simultaneously the four expressions :

must be constant.

(viz. the 4. part of to this paper.)

Still I must mention one point.

M' molecules are given.

The number of those, which have u_1, v_1, w_1 , as velocity components, is to behave to the number of the molecules with u_2, v_2, w_2 as velocity components, like F_1 to F_2 .

$F_3 F_4$ etc. are to have similar meanings.

Wir heben durch M ganz zufällige Griffe M Moleküle aus diesen M' Molekülen heraus, so wird durch das Product $F_1^{kF_1} F_2^{kF_2} \dots$ die Wahrscheinlichkeit bestimmt, dass 1) ganz bestimmte etwa die kF_1 zuerst gezogenen Moleküle die Geschwindigkeitscomponenten u_1, v_1, w_1 , ferner wiederum ganz bestimmt, z. B. die durch die nächstfolgenden kF_2 Griffe gezogenen Moleküle die Geschwindigkeitscomponenten u_2, v_2, w_2 , u. s. w. haben.

Wenn dagegen die Reihenfolge nicht bestimmt ist, wenn z. B. allgemeiner nach der Wahrscheinlichkeit gefragt würde, dass nur überhaupt unter den M gezogenen Molekülen kF_1 mit den Geschwindigkeitscomponenten u_1, v_1, w_1 , , ferner kF_2 mit den Geschwindigkeitscomponenten u_2, v_2, w_2 , u. s. w. vorhanden sind, ohne Rücksicht auf die Reihenfolge, so wäre diese Wahrscheinlichkeit dem Ausdrucke $\frac{(kF_1)!(kF_2)! \dots}{F_1^{kF_1} F_2^{kF_2} \dots}$ proportional, welcher in erster Annäherung wieder dem Producte $\sqrt{F_1.F_2 \dots}$ proportional ist

Hiernach käme man allerdings wieder auf das Problem zurück, das Maximum des keine Potenzen mehr enthaltenden Productes $F_1.F_2.F_3 \dots$ aufzusuchen, von dem im vierten Abschnitte des Näheren die Rede sein wird.

Ich will mich hierauf auch nicht weiter einlassen, sondern ich glaube hiermit die Natur des zu behandelnden Problems genügend beleuchtet zu haben, und will zur algebraischen Bearbeitung des allgemeinen Problems zurückkehren.

Da würde es sich zuerst um die Bestimmung der bisher mit B bezeichneten Zahl für jede beliebige Zustandsvertheilung oder der Permutabilität dieser Zustandsvertheilung handeln.

Denn bezeichnen wir mit J die Summe der Permutabilitäten aller möglichen Zustandsvertheilungen, so gibt uns der Quotient $\frac{B}{J}$ sofort die Vertheilungswahrscheinlichkeit, welche wir künftig immer mit W bezeichnen wollen.

Wir wollen also zunächst die Permutabilität B derjenigen Zustandsvertheilung berechnen, welche dadurch charakterisirt ist, dass w_0 Moleküle die lebendige Kraft Null, w_1 die lebendige Kraft ε u. s. w. haben.

Dabei muss selbstverständlich sein,

$$w_0 + w_1 + w_2 + \dots + w_p = n \tag{1}$$

$$w_1 + 2w_2 + 3w_3 + \dots + Pw_p = \lambda \tag{2}$$

We lift randomly grasps of molecules M by M out from these M' molecules , then through that product $F_1^{kF_1} F_2^{kF_2} \dots$ is determined the probability that (1) for instance kF_1 completely determined the molecules with the velocity components, u_1, v_1, w_1 , pulled first , furthermore again kF_2 completely determine, e.g. the molecules that have the velocity components u_2, v_2, w_2 , etc. pulled by the next grasps.

If on the contrary, the sequence is not certain, if for instance more generally we look for the probability that among the M pulled molecules there are kF_1 with the velocity components u_1, v_1, w_1 , furthermore kF_2 with the velocity components u_2, v_2, w_2 , etc. available, without consideration for the order, then this probability expression would be proportional to $\frac{(kF_1)!(kF_2)! \dots}{F_1^{kF_1} F_2^{kF_2} \dots}$, which in first approximation again is proportional to the product $\sqrt{f_1.f_2 \dots}$

However from this, we will return again to the problem : look up for the maximum of the to products $F_1.F_2.F_3 \dots$ containing no more powers , in the fourth part of the talk. (???)

I do not want to let myself on that further, but I believe to have sufficient lit up hereby the nature of the problem which can be treated, and want to return to the algebraic handling of the global problem .

There it would concern first the determination of the number for any statedistribution, named so far B , or the permutability of these statedistributions.

Because we name the total of the permutabilities of all possible state distributions J , then the quotient gives us immediately $\frac{B}{J}$ the distribution probability which we want to always name W in the future.

We want to calculate thus first the permutability B of that state distribution, which is characterised by the fact that w_0 molecules have the alive force zero, w_1 the alive force ε etc.

It must naturally be

denn die Gesamtzahl der Moleküle soll n , und die gesammte lebendige Kraft derselben $\lambda\varepsilon = L$ sein.

Wollen wir die oben definirte Zustandsvertheilung nach der früher angegebenen Methode schreiben, so erhalten wir eine Complexion, welche zuerst w_0 Nullen, dann w_1 Einser u. s. w. enthält.

Wir wissen, die Zahl B oder die Permutabilität ist nichts Anderes als die der Permutationen der Elemente dieser Complexionen, welche im Ganzen n Elemente enthält, worunter aber w_0 Elemente unter einander gleich sind.

Ebenso sind auch $w_1 w_2$ u. s. w. Elemente unter einander gleich.

Die Anzahl dieser Permutationen ist also bekanntlich

$$B = \frac{n!}{(w_0)!(w_1)! \dots} \quad (3)$$

Die wahrscheinlichste Zustandsvertheilung wird diejenige sein, für welche $w_0, w_1 \dots$ solche Werthe haben dass B ein Maximum, oder weil der Zähler von B constant ist, dass der Nenner von B ein Minimum ist.

Die Grössen $w_0 w_1$ u. s. w. sind dabei gleichzeitig an die beiden Bedingungen (1) und (2) gebunden. Da der Nenner von B ein Product ist, so wird es am besten sein, das Minimum seines Logarithmus, also das Minimum von ... zu untersuchen

$$M = \ell(w_0)! + \ell(w_1)! + \dots \quad (4)$$

Hierbei bedeutet ℓ den log. nat.

Es ist zwar natürlich, dass bei Lösung unseres Problems nur ganze Zahlenwerthe für die Grösse w_0, w_1, \dots einen Sinn haben.

Um jedoch die Differentialrechnung anwenden zu können, wollen wir zunächst auch gebrochene Werthe für diese Grössen zulassen und daher das Minimum des Ausdruckes

$$M_1 =: \ell\Gamma(w_0 + 1) + \ell\Gamma(w_1 + 1) + \dots \quad (4a)$$

suchen. welcher für ganzzahlige Werthe der Grössen w_0, w_1, \dots mit dem Ausdrucke (4) identisch ist.

Wir bekommen dann diejenigen unecht gebrochenen Werthe derselben, welche unter den Bedingungen (1) und (2) den grössten Werth für M_1 liefern.

Die Lösung des Problems werden wir dann jedenfalls erhalten, wenn wir für w_0, w_1 , u. s. w. solche ganze Zahlen wählen, welche den gefundenen unecht gebrochenen möglichst nahe liegen.

because the total amount of the molecules is n , and the total alive force is $\lambda\varepsilon = L$

We want to write the statedistribution defined above according to the method indicated previously, then we get a complexion, which contains first w_0 zeros, then w_1 one's etc.

We know that the number B or the permutability are nothing but the number of the permutations of the items of these complexions, which in the whole contains n items, among which however w_0 items are alike each other.

Likewise $w_1 w_2$ etc. items are also the same as each other.

The number of these permutations is thus as well known

The most probable state distribution will be that, for which w_0, w_1, \dots takes the value such that B has a maximum, or because the numerator of B is constant that the denominator of B is a minimum.

The quantities w_0, w_1 etc. are thereby the same as those given in the two conditions (1) and (2). Since the denominator of B is a product, then it will be best to look for, the minimum of its logarithm, thus the minimum of

Here ℓ means the log nat.

It is natural that in solving our problem only the value of all numbers for the quantities w_0, w_1, \dots has a sense.

However, in order to be able to apply differential calculus, we want to permit first the values for these quantities to be also factorized and therefore we look for the minimum of the expression

which is identical to the expression (4) for integer values of the quantities w_0, w_1, \dots

We get then those dummy fractional (?) value the same which supply under the conditions (1) and (2) the largest value for M_1 .

We will get the solution of the problem anyhow if we select for w_0, w_1 , etc. such integer numbers, which are situated as close as possible to the factors found.

Sollte hie und da eine Abweichung von einer oder wenigen Einheiten erforderlich sein, so kann man sich davon, leicht durch wirkliche Bildung der unmittelbar zunächst liegenden Complexionen überzeugen.

Das Minimum von M_1 wird gefunden, indem wir zur Grösse M_1 die linken Seiten der beiden Gleichungen (1) und (2), erstere mit der Constanten h letztere mit der Constanten k multiplicirt, addiren, und dann die partiellen Differentialquotienten der so erhaltenen Summe nach jeder der Grössen $w_0, w_1, w_2 \dots$ genommen, gleich Null setzen.

Wir erhalten dadurch zunächst folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{d\ell\Gamma(w_0 + 1)}{dw_0} + h &= 0, \\ \frac{d\ell\Gamma(w_1 + 1)}{dw_1} + h + k &= 0, \\ \frac{d\ell\Gamma(w_2 + 1)}{dw_2} + h + 2k &= 0, \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \frac{d\ell\Gamma(w_p + 1)}{dw_p} + h + pk &= 0 \end{aligned}$$

voraus sich ergibt

$$\begin{aligned} \frac{d\ell\Gamma(w_1 + 1)}{dw_1} - \frac{d\ell\Gamma(w_0 + 1)}{dw_0} &= \frac{d\ell\Gamma(w_2 + 1)}{dw_2} - \frac{d\ell\Gamma(w_1 + 1)}{dw_1} \\ = \frac{d\ell\Gamma(w_3 + 1)}{dw_3} - \frac{d\ell\Gamma(w_2 + 1)}{dw_2} &= \dots \end{aligned} \tag{5}$$

Es dürfte jedenfalls sehr schwierig sein, das Problem durch wirkliche Einsetzung der bestimmten Integrale an die Stelle der Gammafunction zu lösen;

glücklicherweise interessirt uns hier nicht die allgemeine Lösung der Aufgabe für beliebige endliche Werthe von p und n , sondern nur der Grenzfall, dem die Lösung des Problems zueilt, wenn die Anzahl der in Betracht kommenden Moleküle immer grösser und grösser wird .

Dann werden auch die Zahlen w_0, w_1, w_2 u. s. w. immer grösser und grösser.

wir wollen mit $\varphi(x)$ die Function $\ell\Gamma(x + 1) - x.(lx - 1) - 1/2\ell 2\pi$ bezeichnen.

Dann können wir die erste der Gleichungen (5) folgendermassen schreiben:

$$\ell w_1 + \frac{d\varphi(w_1)}{dw_1} - \ell w_0 - \frac{d\varphi(w_0)}{dw_0} = \ell w_2 + \frac{d\varphi(w_2)}{dw_2} - \ell w_1 - \frac{d\varphi(w_1)}{dw_1} \tag{6}$$

In ähnlicher Weise kann man die übrigen Gleichungen (5) schreiben. Man hat dann aber bekanntlich

If here and there a deviation of few units should be necessary, then one can make sure of it, easily by real construction of the complexions being situated directly close. (???)

The minimum of M_1 will be found, by multiplying the left sides of the two equations (1) and (2), the first with the constant h , the latter with constant k , and adding them to the quantity M_1 , and then the partial derivatives of this sum taken with respect to every quantities $w_0, w_1, w_2 \dots$, are set directly to zero.

We get thereby the first following equations

which results in

It might anyhow be very difficult to solve the problem by real computation of the integrals in the place of the function Gamma;

fortunately what interests us here is not the general solution of the function for any finite values of p and n , but only the limit, which the solution of the problem reaches, when the number of possible molecules becomes ever larger and larger.

Then the numbers w_0, w_1, w_2 etc. continue to become larger and larger.

We want to denote the function $\ell\Gamma(x + 1) - x.(lx - 1) - 1/2\ell 2\pi$ by $\varphi(x)$.

Then we can write the first of the equations (5) as follows

In similar way one can write the remaining equations (5). One has then however as well known

$$\varphi(x) = -1/2\ell x + \frac{1}{12x} + \dots \quad (6a)$$

Diese Reihe wird nur für $x = 0$ ungiltig, für welchen Werth jedoch $x!$ und $\sqrt{2\pi}(\frac{x}{e})^x$ genau denselben Werth haben, daher $\varphi(x) = 0$ wird

This series does not apply only if $x = 0$, for which value however $x!$ and $\sqrt{2\pi}(\frac{x}{e})^x$ have exactly the same value, therefore it becomes then $\varphi(x) = 0$

Substituirt man daher gleich von vorne herein an die Stelle des Problems, das Minimum von $w_0!w_1!w_2! \dots$ zu suchen das leichtere Problem, das Minimum von

therefore the problem to look up for the minimum $w_0!w_1!w_2! \dots$? one substitutes the easier equivalent problem, to look up for the minimum of

$$\sqrt{2\pi}(\frac{w_0}{e})^{w_0} \sqrt{2\pi}(\frac{w_1}{e})^{w_1} \sqrt{2\pi}(\frac{w_2}{e})^{w_2} \dots$$

zu suchen, so stört auch der Werth $w = 0$ nicht, welchem Umstande es zu verdanken, ist, dass selbst bei mässig grossen Werthen von n und p beide Probleme so nahe übereinstimmende Lösung haben.

, then it does not disturb neither the value $w = 0$, whatever the circumstances, is that even with moderately large values of n and p both problems have close solution.

Aus der Reihe (6a) folgt:

From the series (6a) follows:

$$\frac{d\varphi(w_0)}{dw_0} = -\frac{1}{2w_0} - \frac{1}{12w_0^2} - \dots, \quad (6b)$$

welche Grösse für sehr grosse werthe von w_0 gegenüber ℓw_0 verschwindet und da dasselbe auch für die übrigen w gilt, so kann für sehr grosse Werthe dieser Grössen die Gleichung (6) folgendermassen geschrieben werden :

which quantities disappears for very large values of w_0 or ℓw_0 and the same applies there to the remaining w , then the equation (6) can be written as follows for very large values of these quantities:

$$\ell w_1 - \ell w_0 = \ell w_2 - \ell w_1$$

oder

or

$$\frac{w_1}{w_0} = \frac{w_2}{w_1}.$$

ebenso erhält man für die übrigen w die Gleichungen :

likewise one gets for the remaining w equations

$$\frac{w_2}{w_1} = \frac{w_3}{w_2} = \frac{w_4}{w_3} = \dots \quad (6c)$$

Man sieht sofort, dass die Vernachlässigung des Ausdruckes (6b) darauf hinausläuft, dass wir an Stelle des Minimums des Ausdrucks (3) das Minimum von

One sees immediately that the neglect of the expression (6b) amounts to that we look the minimum of

$$\frac{\sqrt{2\pi}(\frac{n}{e})^n}{\sqrt{2\pi}(\frac{w_0}{e})^{w_0} \sqrt{2\pi}(\frac{w_1}{e})^{w_1} \dots}$$

suchen, also bei Stellung des Problems für $w!$ eine bekannte Näherungsformel benutzen (vergl. Schlömilch's Comp. S. 438), in der wie alles übrige vernachlässigt, so dass sie auf Vertauschung von $w!$ mit $\sqrt{2\pi}(\frac{w}{e})^w$ hinausläuft.

in place of the minimum of the expression (3), thus in our problem we use a well-known approximation formula for $w!$ (viz. Schloemilch's Comp. P. 438), neglecting all the remaining, so that it come down to replace $w!$ by $\sqrt{2\pi}(\frac{w}{e})^w$.

Bezeichnen wir den gemeinsamen Werth der Quotienten (6c) mit x , so erhalten wir

If we define the common value of the quotients (6c) as x , then we get

$$w_1 = w_0x, w_2 = w_0x^2, w_3 = w_0x^3 \text{ etc.} \tag{7}$$

Die beiden Gleichungen (1) und (2) aber gehen über in The two equations (1) and (2) however merge in

$$w_0(1 + x + x^2 + \dots + x^p) = n \tag{8}$$

$$w_0(x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + px^p) = \lambda \tag{9}$$

Man sieht sogleich, dass diese Gleichungen bis auf eine vollkommen unwesentliche Abweichung mit den Gleichungen (42) und den unmittelbar vorhergehenden meiner "weiteren Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen" übereinstimmen.

One sees immediately that these equations correspond to the equations (42) up to one perfectly insignificant deviation and the directly preceding ones in my "further studies of the heat equilibrium among gas molecules".

Wir können die letzten Gleichungen, wie man leicht sieht, auch so schreiben :

We can write the last equations, as one sees easy, also in such a way:

$$w_0 \cdot \frac{x^{p+1} - 1}{x - 1} = n \tag{10}$$

$$w_0x \frac{d}{dx} \cdot \frac{x^{p+1} - 1}{x - 1} = \lambda$$

Die letzte Gleichung lautet, wenn man die Differentiation ausführt :

The last equation reads, if one executes the differentiation

$$w_0x \frac{px^{(p+2)} - (p+1)x^{p+1}}{(x-1)^2} = \lambda \tag{11}$$

Dividirt man diese Gleichung durch Gleichung (10), so er gibt sich

Dividing this equation by equation (10), yields

$$\frac{px^{(p+2)} - (p+1)x^{p+1} + x}{(x^{p+1} - 1)(x - 1)} = \frac{\lambda}{n}$$

oder

or

$$(pn - \lambda)x^{p+2} - (np - n - \lambda)x^{p+1} + (n + \lambda)x - \lambda = 0 \tag{12}$$

Man sieht sofort aus dem Satze von Cartesius, dass diese Gleichung nicht mehr als drei reelle positive Wurzeln besitzen kann, zwei von ihnen sind =1

One sees immediately from the theorem of Cartesius that this equation cannot possess any more than three real positive roots, two of them being = 1

Allein, es ist wieder leicht einzusehen, dass diese beiden Wurzeln keine Lösung der Gleichungen (8) und (9), also auch keine Lösung des Problems liefern, dass sie vielmehr in die Schlussgleichung bloss durch die Multiplication mit dem Factor $(x - 1)^2$ hineingekommen sind.

However, it is again easy to see that these two roots are no solution of equations (8) and (9), thus also no solution of the problem so that that we rather come to the final equation only by the multiplication with the factor $(x - 1)^2$.

Um sich davon zu überzeugen, braucht man bloss die Schlussgleichung direct durch Division der Gleichung (8) und (9) abzuleiten.

In order to convince oneself of it, one needs to only derive the final equation directly by division of the equation (8) and (9).

Wenn man nach geschehender Division überall die Variable x aus dem Nenner hinwegschafft, und nach Potenzen von x ordnet, so erhält man die Gleichung ...

If one puts aside (?) the variable x from the denominator after performing division everywhere, and arranges according to the powers of x , then one gets the equation

$$(np - \lambda)x^p + (np - n - \lambda)x^{p-1} + (np - 2n - \lambda)x^{p-2} + \dots (n - \lambda)x - \lambda = 0 \tag{13}$$

welche Gleichung nur vom p^{ten} Grade ist, und welche offenbar alle Wurzeln, die Lösungen des Problems liefern, enthält.

Es kann also die Gleichung (12) nicht mehr als eine positive Wurzel besitzen, welche einer Lösung des Problems entspricht.

Negative oder complexe Wurzeln haben selbstverständlich für die Lösung des Problems keine Bedeutung.

Es ist hiebei wieder zu beachten, dass die grösste lebendige Kraft, welche ein Molekül anzunehmen im Stande ist, also, $P = p\varepsilon$, sehr gross ist im Vergleiche mit der mittleren lebendigen Kraft $\frac{L}{n} = \frac{\lambda\varepsilon}{n}$ eines Moleküls, woraus folgt, dass auch p sehr gross ist im Vergleiche mit $\frac{\lambda}{n}$.

Das Gleichungspolynom der Gleichung (13), welche alle brauchbaren Wurzeln mit der Gleichung (12) gemein haben muss, ist daher für $x = 0$ negativ, für $x = 1$ dagegen hat es den Werth $n(p+1)(\frac{p}{2} - \frac{\lambda}{n})$, welcher, da p sehr gross im Vergleiche mit $\frac{\lambda}{n}$ ist, jedenfalls positiv und zwar sehr gross ist.

Die einzige positive Wurzel für x liegt also jedenfalls zwischen Null und 1, und wir wollen dieselbe jetzt aus der bequemerem Gleichung (12) bestimmen.

Da x ein echter Bruch ist, so ist die p^{te} und $(p+1)^{te}$ Potenz davon jedenfalls sehr klein, kann also vernachlässigt werden, in welchem Falle sich dann ergibt :

$$x = \frac{\lambda}{n+\lambda}.$$

Dies ist der Werth, welchem x für immer grösser werdende p zueilt, und man sieht die wichtige Thatsache, dass für einigemassen grössere p der Werthe des Quotienten $\frac{\lambda}{n}$ abhängig ist, und nur ganz wenig variirt, wenn p variirt, oder auch, wenn λ und n so variiren, dass deren Quotient constant bleibt.

Hat man einmal x gefunden, so ergibt sich aus der Gleichung (10)

$$w_0 = \frac{1-x}{(1-x)^{p+1}n} \quad (14)$$

und aus den Gleichungen (7) ergeben sich dann die Werthe der übrigen w .

$$\frac{w_0}{n}, \frac{w_1}{n}, \frac{w_2}{n}, \text{ etc. ,}$$

also die Wahrscheinlichkeit der verschiedenen lebendigen Kräfte für grössere p wieder fast nur von der mittleren lebendigen Kraft eines Moleküls abhängig sind.

Für unendlich grosse p erhält man folgende Grenzwerte :

which equation is only of degree p , and which obviously contains all roots, which supply solutions of the problem.

The equation (12) possesses no more than one positive root, which corresponds to a solution of the problem.

Negative or complex roots do not have naturally a meaning for the solution of the problem.

It is to be noted again at this point (?) that the largest alive force, a molecule is assumed to have $P = p\varepsilon$, is very large in comparisons with the average alive force $\frac{L}{n} = \frac{\lambda\varepsilon}{n}$ of a molecule from which it follows that p is also very large in comparisons with $\frac{\lambda}{n}$.

The polynomial of the equation (13), which must have all useful roots in common with the equation (12), is therefore negative for $x = 0$; on the contrary for $x = 1$, it has the value $n(p+1)(\frac{p}{2} - \frac{\lambda}{n})$, which is anyhow a very large positive number, since p is very large in comparisons with $\frac{\lambda}{n}$.

The only positive root for x is necessarily between zero and 1, and we want to determine this root now from the more suitable equation (12).

Since x is a proper fraction, then its p^{th} and $(p+1)^{th}$ powers are anyhow very small, can thus be neglected, in which case then arises:

This is the value to which x tend when p becomes ever more large, and one sees the important fact (?) that for quite larger p the value of x is only dependent on the quotient $\frac{\lambda}{n}$, and only varies quite little, even if p varies, or also, if λ and n vary, their quotient remains constant.

If (once(?)) one has found x , then results from the equation (10)

and from the equations (7) then results the values of the remaining w .

thus the probability of the different alive forces for larger p again are dependent almost only on the average alive force of a molecule.

For infinitely large p one obtains the following limit value:

$$w_0 = \frac{n^2}{n + \lambda}, w_1 = \frac{n^2 \lambda}{(n + \lambda)^2}, w_2 = \frac{n^2 \lambda^2}{(n + \lambda)^3}, \text{ etc} \tag{15}$$

Um uns zu überzeugen, ob wir ein Maximum oder ein Minimum haben, müssen wir die zweite Variation der Gleichung (4) aufsuchen. Setzen wir wieder voraus w_0, w_1, w_2 , u. s. w. seien sehr gross, so können wir statt $\ell\Gamma(w+1)$ die Annäherungsformel ,

In order to convince us, whether we have a maximum or a minimum, we must consider the second variation of the equation (4). We presuppose again w_0, w_1, w_2 , etc. are very large, then instead of $\ell\Gamma(w+1)$ we can use the approximation formula

$$w \cdot (\ell w - 1) - 1/2 \ell w - 1/2 \ell (2\pi) + \frac{1}{12w} + \text{etc.}$$

benützen. und erhalten mit Vernachlässigung der Glieder, welche die Quadrate und höhern Potenzen der w im Nenner haben,

and get in neglecting the terms, which have squares and higher powers of w in the denominator,

$$\delta^2 M = \frac{(\delta w_0)^2}{w_0} + \frac{(\delta w_1)^2}{w_1} + \dots$$

Wir haben es also in der That mit einem Minimum zu thun.

We have thus indeed a minimum.

Ich will noch Einiges bezüglich der früher mit J bezeichneten Grösse bemerken. Man findet zunächst leicht, dass J den Werth des Binomialcoefficienten hat:

I want still to note a point concerning that earlier defined quantity J . One finds first easily that J has the value of the following binomial coefficients:

$$J = \binom{\lambda + n - 1}{\lambda};$$

wenn man also Grössen, die mit wachsendem λ oder n verschwinden, vernachlässigt

if one thus neglect the quantities, which disappear with increasing λ or n ,

$$J = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(\lambda + n - 1)^{\lambda+n-1/2}}{(n - 1)^{n-1/2} \lambda^{\lambda+1/2}}.$$

Nun ist $\frac{\lambda}{n}$ gleich der mittleren lebendigen Kraft μ eines Moleküls,

Now $\frac{\lambda}{n}$ is equal to the average alive force μ of a molecule,

daher $\frac{\lambda}{n} = \frac{\mu}{\varepsilon}$, also jedenfalls ausserordentlich gross, wesshalb man hat

therefore $\frac{\lambda}{n} = \frac{\mu}{\varepsilon}$, thus anyhow extraordinarily large, so that one has

$$(\lambda + n - 1)^{\lambda+n-1/2} = \lambda^{\lambda+n-1/2} \left[\left(1 + \frac{n-1}{\lambda} \right)^\lambda \right]^{1+\frac{2n-1}{2\lambda}} = \lambda^{\lambda+n-1/2} \cdot e^{n-1}.$$

Es ist also

It is thus

$$J = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\lambda^{n-1} e^{n-1}}{(n - 1)^{n-\frac{1}{2}}}$$

daher ist, abgesehen von verschwindenden Grössen

therefore is, apart from infinitesimal quantities

$$\ell J = n \ell \frac{\lambda}{n} + n - \ell \lambda + \frac{1}{2} \ell (2\pi).$$

Es versteht sich von selbst, dass diese Formeln hier nicht zu dem Zwecke berechnet worden sind, um für den Fall, wo p und n endliche Werthe haben, Annäherungsformeln zu gewinnen, denn dieser Fall dürfte in der Praxis kaum von irgend einer Wichtigkeit sein, sondern bloss um Formeln zu gewinnen, welche bei unendlichem Wachsen von p und n sicher die richtigen Grenzwerte liefern.

Trotzdem wird es vielleicht zur Veranschaulichung beitragen, wenn wir zuerst an einigen speciellen Fällen zeigen, dass selbst für ganz mässig grosse Werthe von p und n die aufgestellten Formeln sich der Wahrheit wenigstens einigermaßen anschliessen, so dass sie selbst als Annäherungsformeln nicht ohne allen Werth wären.

Wir nehmen zuerst den schon oben betrachteten Fall, wo $n = \lambda = 7$ ist;

d. h. , es sollen 7 Moleküle vorhanden sein, und die Gesamtsumme der lebendigen Kraft aller Moleküle soll 7ε sein. Die mittlere lebendige Kraft eines Moleküls ist also gleich *varepsilon*.

Nehmen wir zuerst an, es soll auch $p = 7$ sein, d. h. jedes Molekül sei nur im Stande, die lebendigen Kräfte $0, \varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon, \dots, 7\varepsilon$ anzunehmen.

Dann verwandelt sich die Gleichung (12) in folgende :

$$6x^9 - 7x^8 + 2x - 1 = 0 \quad (16)$$

woraus folgt:

$$x = \frac{1}{2} + \frac{7}{2}x^8 - 3x^9 \quad (17)$$

Da x nahe $= \frac{1}{2}$ ist, so können wir in den beiden letzten, ohnehin sehr kleinen Gliedern der rechten Seite $x = \frac{1}{2}$ setzen, und erhalten :

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^9}(7 - 3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^7} = 0.5078125.$$

Man könnte leicht diesen Werth wieder für x in die rechte Seite der Gleichung 17 substituieren und würde so einen noch mehr angenäherten Werth für x gewinnen;

doch führt es rascher zum Ziele, da wir bereits einen genäherten Werth für x wissen, wenn wir die Gleichung (16) nach der gewöhnlichen Newton'schen Näherungsmethode behandeln, wodurch sich ergibt

$$x = 0.5088742 \dots$$

Hieraus findet man dann gemäss den Gleichungen (7)

It is understood automatically that these formulas were not calculated here for the purpose to obtain approximation formulas, in the case, where p and n have finite values because this case might hardly be important in practice but to only obtain reliable formulas which supply the correct limit values when p and n grow infinitely.

Perhaps nevertheless it will contribute to the illustration, if we show first in some special cases that even for quite moderately large values of p and n the proposed formulas at least to some extent follow the truth, so that they would not be only approximation formulas without any value.

We take first the case considered already above, where $n = \lambda = 7$;

i.e., 7 molecules should be available, and the total sum of the alive force of all molecules should be 7ε . The middle alive force of a molecule is thus alike *varepsilon*.

We also assume first, $p = 7$, i.e. each molecule is assumed to be only in one the states with the alive forces $0, \varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon, \dots, 7\varepsilon$.

Then the equation (12) transforms into the following:

from which follows:

Since x is approximately equal to $\frac{1}{2}$, then we can consider the two last term in the right side as very small where we set $x = \frac{1}{2}$, and get

One could substitute easily this value to x in the right side of the equation 17 and one would get in such a way an even better approximation value for x ;

but we can get more rapidly to the target, since we already know an approached value for x , if we treat the equation (16) according to the normal Newton's method of approximation, whereby arises

From this one finds then in accordance with the equations (7)

$$\begin{aligned}
 w_0 &= 3.4535 \\
 w_1 &= 1.7574 \\
 w_2 &= 0.8943 \\
 w_3 &= 0.4551 \\
 w_4 &= 0.2316 \\
 w_5 &= 0.1178 \\
 w_6 &= 0.0599 \\
 w_7 &= 0.0304
 \end{aligned}$$

Diese Zahlen würden die Bedingung erfüllen, These numbers would fulfill the condition that dass

$$\sqrt{2\pi} \left(\frac{w_0}{e}\right)^{w_0} \cdot \sqrt{2\pi} \left(\frac{w_1}{e}\right)^{w_1} \dots \text{ etc } .$$

ein Minimum ist, während die Grössen w bloss is a minimum, while the quantities w are only an die beiden Bedingungen geknüpft sind : linked to the two conditions:

$$\begin{aligned}
 w_0 + w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 + w_6 + w_7 &= 7 \\
 w_1 + 2w_2 + 3w_3 + 4w_4 + 5w_5 + 6w_6 + 7w_7 &= 7
 \end{aligned} \tag{18}$$

welches Minimum übrigens wegen der ersten The minimum of the first of the equa- der Gleichungen (18) mit dem Minimum von tions (18) coincides with the minimum of $(w_0)^{w_0}(w_1)^{w_1} \dots$ zusammenfällt. $(w_0)^{w_0}(w_1)^{w_1} \dots$

Sie liefern daher nur eine angenäherte Lösung They supply therefore only an approximate unseres Problems, welches dahin geht, dass solution of our problem, which is to arrange man so viele (w_0) Nullen, so viele (w_1) Einser so many (w_0) zeros, so many (w_1) one's etc. u. s. w. zusammenstellen soll, dass die in as much as possible permutations that the dadurch entstehende Complexion möglichst the complexion resulting from it permits, and so viel Permutationen zulässt, und dass die w gle- that w fulfill those conditions (18) at the same- zeitig die Bedingungen (18) erfüllen. time.

Da p und n hier ganz kleine Zahlen sind, so ist Since p and n are here quite small numbers, keine grosse Annäherung zu erwarten, trotz- then is no very accurate approximation to ex- dem erhält man schon hier die richtige Lösung- pect, although one gets already here the cor- des Permutationsproblems, wenn man für- rect solution of the permutation problem, if jedes w die zunächst liegende ganze Zahl setzt, mit alleinig- er exclusive exception of w_3 , for which one must er Ausnah- man den Werth 1 statt 0.4551 ertheilen muss. take(?) the value 1 instead of 0.4551.

In dieser Weise ergibt sich nämlich In this way arises

$$w_0 = 3, w_1 = 2, w_2 = w_3 = 1, w_4 = w_5 = w_6 = w_7 = 0$$

und in der That sahen wir in der Tabelle and indeed we saw in the table on page 7 that auf Seite 7, dass die Complexion 0001123 der the complexion 0001123 is capable of most meisten Permutationen fähig ist. permutations.

Wir wollen jetzt dasselbe specielle Beispiel We want now consider the same special ex- $n = \lambda = 7$ behandeln, aber $p = \infty$ setzen; ample $n = \lambda = 7$, but set $p = \infty$; i.e. we d.h. die Moleküle sollen die lebendigen Kräfte assume the molecules are in the status with 0, 1, 2, 3 u. s. w. bis ∞ anzunehmen im alive forces 0, 1, 2, 3 etc. to ∞ .

Wir wissen, dass die Werthe der Grössen w We know that then the values of the quantities dann wenig verschieden von den früheren aus- w must not be much different from the earlier- fallen müssen. In der That erhalten wir dann case. Indeed we get then

$$x = \frac{1}{2}; w_0 = \frac{2}{7} = 3.5, w_1 = \frac{w_0}{2} = 1.75, w_2 = \frac{w_1}{2} = 0.875 \quad \text{etc.}$$

Wir wollen noch ein um ein Weniges complicirteres Beispiel machen. We want to still consider a little more complicated example.

Sei $n = 13, \lambda = 19$ was wir jedoch nur für den einfacheren Fall behandeln wollen, dass $p = \infty$ ist. Dann haben wir : Let $n = 13, \lambda = 19$ which however we only want to treat for the simpler case that is $p = \infty$. Then we have:

$$\begin{aligned} x &= \frac{19}{32} \\ w_0 &= 5.28125 \\ w_1 &= 3.13574 \\ w_2 &= 1.86815 \\ w_3 &= 1.10493 \\ w_4 &= 0.65605 \\ w_5 &= 0.38950 \\ w_6 &= 0.23133 \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Setzt man hier statt der verschiedenen w die ihnen zunächst liegenden ganzen Zahlen, so erhält man One sets here the closest integers, instead of the different w then one gets

$$w_0 = 5, w_1 = 3, w_2 = 2, w_3 = 1, w_4 = 1, w_5 = w_6 = \dots = 0$$

Schon aus dem Umstande, das $w_0 + w_1 + \dots = 13$ sein soll sieht man, dass wieder eines der w um eine Einheit erhöht werden muss. Already from the circumstance, one sees $w_0 + w_1 + \dots$ is to be $= 13$ that again one w must be increased by a unit.

Am wenigsten weicht w_5 , welches wir $= 0$ gesetzt haben, von der nächst höheren ganzen Zahl ab. To few deviates w_5 , which we set $= 0$, being the next higher integer.

Wir wollen daher lieber $w_5 = 1$ setzen, und erhalten somit die Complexion 0000011122345, deren Ziffersumme in der That $= 19$ ist. Therefore, we rather want to set $w_5 = 1$, and get thus the complexion 0000011122345, their digit total being indeed $= 19$,

Die Anzahl ihrer Permutationen, deren diese Complexion fähig ist, ist The number of permutations, that this complexion can give, is

$$\frac{13!}{5!3!2!} = \frac{13!}{4!3!2!} \cdot \frac{1}{5}$$

Eine Complexion, deren Ziffernsumme ebenfalls $= 19$ is, und von welcher man vermuthen könnte, dass sie sehr vieler Permutationen fähig sein wird, wäre folgende : 0000111222334. A complexion, whose sum of digits could likewise be (?) 19 is, and which could be subject to very many permutations, would be the following: 0000111222334.

Die Anzahl ihrer Permutationen ist The number of their permutations is

$$\frac{13!}{5!3!2!} = \frac{13!}{4!3!2!} \cdot \frac{1}{6}$$

also bereits kleiner als die Anzahl der Permutationen der ersten von uns aus der Annäherungsformel gefundenen Complexion. thus already smaller than the number of permutations of the first complexion found from the approximation formula

Ebenso überzeugt man sich, dass die Zahl der Permutationen der beiden Complexionen 0000111122335 und 0000111122344 kleiner ist.

Dieselbe ist nämlich für beide Complexionen

$$\frac{13!}{4!4!2!2!} = \frac{13!}{4!3!2!} \cdot \frac{1}{8}$$

Noch weit kleiner ist die Anzahl der Permutationen, deren die übrigen möglichen Complexion fähig sind, und es dürfte ganz überflüssig sein, hier darauf weiter einzugehen.

Man wird aus den hier gemachten Beispielen ersehen, dass die oben aufgestellte Näherungsformel selbst bei ziemlich kleinen Werthen von p und n für die grössen w Werthen liefert, die sich meist nur um Bruchtheile von Einheiten, höchstens um 1 oder 2 Einheiten von den wahren Werthen unterscheiden.

Bei den in der mechanischen Wärmethorie vorkommenden Problemen aber haben wir es immer mit ausserordentlich vielen Molekülen zu tun ;

die Gröseen w haben daher sehr grosse Werthe, so dass derartige kleine Abweichungen verschwinden, dass also unsere Näherungsformel die exacte Lösung des Problem liefern.

Wir sehen auch, dass die von uns als die wahrscheinlichste gefundene Zustandsvertheilung in gewisser Beziehung übereinstimmt mit derjenigen, von welcher bekannt ist, dass sie sich bei im Wärmegleichgewichte befindlichen Gasen einstellt.

Es ist nämlich gemäss den Formeln (15) die Wahrscheinlichkeit der lebendigen Kraft $s\varepsilon$ gegeben durch

$$w_s = \frac{n^2}{n + \lambda} \cdot \left(\frac{\lambda}{n + \lambda} \right)^s$$

Da $\frac{\lambda\varepsilon}{n}$ gleich der mittleren lebendigen Kraft μ eines Moleküls, also endlich ist, so ist n sehr klein gegen λ . Es ist also nahezu

Es ist also nahezu

$$\frac{n^2}{n + \lambda} = \frac{n}{\lambda} = \frac{\lambda\varepsilon}{n}, \frac{\lambda}{n + \lambda} = 1 - \frac{n}{\lambda} = e^{-\frac{\varepsilon}{\lambda}} = e^{-\frac{\varepsilon}{\mu}}$$

woraus folgt :

$$w_s = \frac{n\varepsilon}{\mu} e^{-\frac{\varepsilon s}{\mu}}$$

Doch bedarf der übergang zur mechanischen Wärmethorie, besonders die Einführung der Differentiale, noch einiger überlegung und einer nicht unwesentlichen Modification der Formel.

Likewise one convinces oneself that the number of the permutations of the two complexions 0000111122335 and 0000111122344 is smaller.

It is for both complexions

The number of permutations, which are possible among the remaining possible complexions is still far smaller, and it might be quite unnecessary to deal with it further here.

One is seen from the examples made here that the approximation formula given above, supplies, for rather small values of p and n , the value of the quantity w , which itself differs from the true values usually only for fraction (?) of units, at the most 1 or 2 units.

For the problems occurring in the mechanical heat theory however we have always to deal with extraordinarily many molecules;

therefore, the quantities w have very large values so that such small deviations disappear thus that our approximation formula supplies with the exact solution of the problem.

We see also that the found most probable state distribution present a certain relationship corresponding with the one that they adjust to in heat equilibrium gases, as it is known.

In accordance with the formulas (15) the probability of the alive force $s\varepsilon$ is given by

It thus almost is

from which follows:

But the transition of the formula to the mechanical heat theory, particularly the introduction of the differentials, requires still some consideration and a not insignificant modification.

2 Die lebendigen Kräfte gehen continuirlich in einander über II. The alive forces exchange continuously into each other

Wir wollen, behufs Einführung der Differentiale in unser Formel, zu derjenigen Versinnlichungsweise des Problem es übergehen, welche auf Seite 8 angedeutet ist;

denn dieselbe scheint mit die Sache am besten klar zu machen.

Dort war jedes Molekül nur im Stande, eine der lebendigen Kräfte $0, \varepsilon, 2\varepsilon \dots p\varepsilon$ anzunehmen.

Wir bildeten alle möglichen Complexionen, d. h. alle mit den Bedingungen des Problems vereinbaren Vertheilungsweisen dieser $1 + p$ lebendigen Kräfte unter die Moleküle, indem wir aus eine Urne fingirten, welche unendlich viele Zetteln enthält.

Auf einigen derselben ist die lebendige Kraft Null, aufgenau gleich vielen Zetteln die lebendige Kraft ε u. s. w. aufgeschrieben.

Wir bildeten die erste Complexion, indem wir für jedes der Moleküle einen Zettel aus der Urne zogen, und dem Moleküle diejenige lebendige Kraft beilegten, welche auf dem für dasselbe gezogenen Zettel stand.

In derselben Weise wurden noch sehr viele andere Complexionen gebildet und dann nach der Wahrscheinlichkeit gefragt, dass eine Complexionen führen, bezeichneten wir als die wahrscheinlichst gefragt, dass eine Complexion zu dieser oder jener Zustandsvertheilung führe

Diejenige Zustandsvertheilung, zu welcher die meisten Complexionen führe, bezeichneten wir als die wahrscheinlichste oder als die Wärmeleichgewichtes.

Da wir jetzt zu einer continuirlichen Reihe von lebendigen Kräften übergehen wollen, so wäre das natürlichste Verfahren folgendes :

Wir bezeichnen mit ε vorläufig eine sehr kleine Grösse, und nehmen an, in der Urne seien sehr viele Zettel, auf denen lebendige Kräfte aufgeschrieben sind, die zwischen Null und ε liegen ;

genau gleich viele Zettel seien in der Urne , auf denen lebendige Kräfte aufgeschrieben sind, die zwischen ε und 2ε , zwischen 2ε und 3ε u. s. w. bis ins Unendliche, liegen.

Da ε sehr klein ist, so können alle Moleküle, deren lebendige Kraft zwischen x und $x + \varepsilon$ liegt, so angesehen werden, als ob sie dieselbe lebendige Kraft besässen.

Before (?) introducing the differentials to our formula, we want to reconsider (?) that interpretation (?) of the problem, which is suggested on page 8; (???)

because it seems to make the thing more clear.

There each molecule was assumed to be only in the state : one with the alive forces $0, \varepsilon, 2\varepsilon, \dots, p\varepsilon$.

We formed all possible complexions, i.e. all that agree with the conditions of the problem concerning the distribution of these $1 + p$ alive forces among the molecules, we imagine to take (?) from an urn , which contains infinitely many tickets.

There are exactly the same number of tickets noted with the alive force zero, with the alive force ε , etc.

We formed the first complexion, by pulling a ticket for each of the molecules from the urn, and molecules have that alive force attached, which was on the corresponding pulled ticket.

In the same way still very many other complexions were formed and then asked for the probability to obtain a complexion , we look for the most probable Complexion leading to this or that state distribution (???)

We called that state distribution, to which most complexions lead, as the most probable or heat equilibrium.

Since we want to turn into a continuous series of alive forces, then the most natural procedure would be the following:

We name a very small quantity ε provisionally, and assume that in the urn are very many tickets, on which alive forces are noted, which are situated between zero and ε ;

In the urn, there are exactly the same number of tickets, on which alive forces are noted, between ε and to 2ε , between 2ε and 3ε etc. up to the infinite.

Since ε is very small, then all molecules, whose alive force is situated between x and $x + \varepsilon$, can be regarded as if they would possess the same alive force.

Der übrige Gang der Rechnung ist ganz derselbe wie im ersten Abschnitte.

Wir nehmen an, es sei irgend eine Complexion gezogen worden ;

w_0 Moleküle hätten dabei eine lebendige Kraft erhalten, die zwischen 0 und ε , w_1 Moleküle eine solche, die zwischen ε und 2ε , w_2 eine solche, die zwischen 2ε und 3ε liegt u. s. w.

Da hiebei die Grössen w_0, w_1, w_2 u. s. w. offenbar unendlich klein von der Ordnung ε sind, so wollen wir lieber setzen

$$\begin{aligned} w_0 &= \varepsilon f(0), w_1 = \varepsilon f(\varepsilon), \\ w_2 &= \varepsilon f(2\varepsilon) \end{aligned} \tag{19}$$

Die Wahrscheinlichkeit der betreffenden Zustandsvertheilung ist dann genau wie im ersten Abschnitte gegeben durch die Anzahl der Permutationen, deren die Elemente jener Zustandsvertheilung fähig sind, also durch die Zahl

$$\frac{n!}{w_0!w_1!w_2!\dots}$$

Als die wahrscheinlichste Zustandsvertheilung, d. h. als diejenige, welche dem Wärmegleichgewichte entspricht, definiren wir wieder diejenige, bei welcher dieser Ausdruck ein Maximum, also dessen Nenner ein Minimum wird .

Benützen wir sogleich eine im ersten Abschnitte hinlänglich motivierte Näherungsformel, indem man statt $w!$ die Grösse $\sqrt{2\pi} \left(\frac{w}{e}\right)^w$ substituieren, in der wir übrigens den Factor $\sqrt{2\pi}$ unterdrücken können, weil er nur als constanter Factor zur Grösse hinzutritt, welche ein Minimum werden soll;

führen wir ferner statt der Bedingung, dass er Nenner ein Minimum werden muss, die gleichbedeutende ein, dass dessen Logarithmus ein Minimum werden muss;

dann erhalten wir für das Wärmegleichgewicht die Bedingung, dass die Grösse

$$M = w_0 \ell w_0 + w_1 \ell w_1 + w_2 \ell w_2 + \dots - n$$

ein Minimum sei, während gleichzeitig wieder die beiden Bedingungen erfüllt sein müssen :

$$n = w_0 + w_1 + w_2 + \dots \tag{20}$$

$$L = \varepsilon w_1 + 2\varepsilon w_2 + 3\varepsilon w_3 + \dots \tag{21}$$

welche mit den Gleichung (1) und (2) des ersten Abschnittes identisch sind.

Führen wir hier zunächst statt der Grössen w die Function f vermöge der Gleichungen (19) ein, so erhalten wir:

The remaining course of the calculation is completely the same as in first paragraph.

We assume a complexion is pulled;

w_0 molecules would have received thereby an alive force, between 0 and ε , w_1 molecules between ε and 2ε , w_2 molecules between 2ε and 3ε etc.

Since the quantities w_0, w_1, w_2 etc. are obviously infinitely small with the order of magnitude ε , then we rather want to set

The probability of the concerned state distribution is then exactly as the one given in first paragraph by the number of the permutations, which are possible among the items of that state distribution, so by the number

We define again the most probable state distribution, i.e. the one, to which heat equilibrium corresponds, that maximizes this expression, thus minimizing its denominator.

We use immediately an approximation formula sufficiently motivated in first paragraph, by substituting the quantity $\sqrt{2\pi} \left(\frac{w}{e}\right)^w$ instead of $w!$, in which we can suppress the factor $\sqrt{2\pi}$, because it appears only as constant factor in the quantity which is to be minimized;

We consider furthermore instead of the condition that its denominator must become a minimum, the equivalent condition that its logarithm must become a minimum;

Then we get the condition for the heat equilibrium that the quantity

is a minimum, while simultaneous again the two conditions to be fulfilled must be:

which are identical to the equation (1) and (2) of the first paragraph.

If we use here first the function f instead of the sizes w according to the equation (19), then we get:

$$M = \varepsilon[f(0)\ell f(0)] + f(\varepsilon)\ell f(2\varepsilon) + f(\varepsilon)\ell f(2\varepsilon) + \dots + \varepsilon\ell\varepsilon[f(0) + f(\varepsilon) + f(2\varepsilon) + \dots] - n$$

und die Gleichungen (20) und (21) verwandeln sich in folgende : and the equations (20) and (21) transform into the following:

$$n = \varepsilon[f(0) + f(\varepsilon) + f(2\varepsilon) + \dots] \quad (22)$$

$$L = \varepsilon[\varepsilon f(\varepsilon) + 2\varepsilon f(2\varepsilon) + 3\varepsilon f(3\varepsilon) + \dots] \quad (23)$$

In Folg der Gleichung (22) kann der Ausdruck für M auch so geschrieben werden : following the equation (22), the expression for M can also be written in such a way:

$$M = \varepsilon[f(0)\ell f(0) + f(\varepsilon)\ell f(\varepsilon) + f(2\varepsilon)\ell f(2\varepsilon) + f(3\varepsilon)\ell f(3\varepsilon) + \dots] - n + n\ell(\varepsilon).$$

Da n und ε constant sind,

(denn auch die Grösse ε hat für alle möglichen Complexionen, daher auch für alle möglichen Zustandsvertheilungen denselben Werth, ist also hier, wo es sich um den über gang von einer Zustandsvertheilung zu einer andern handelt, als constant anzusehen),

so ist die Grösse

Since n and ε are constant,

(As the quantity ε has the same value for all possible complexions, therefore for all possible state distributions, thus here, where it concerns the transition of a state distribution to another, we consider them as constant),

so the quantity

$$M' = \varepsilon[f(0)\ell f(0) + f(\varepsilon)\ell f(\varepsilon) + f(2\varepsilon)\ell f(2\varepsilon) + f(3\varepsilon)\ell f(3\varepsilon) + \dots] \quad (24)$$

zu einem Minimum zu machen.

Wir wissen aber, dass ε eine verschwindend kleine Grösse ist, welche um so kleiner wird, je mehr sich die Reihe der möglichen lebendigen Kräfte einem Continuum nähert.

Für verschwindende ε aber können wir die in den Gleichungen (22), (23) und (24) vorkommenden Summen in der Form von bestimmten Integralen schreiben, und erhalten folgende Gleichungen

is to be made a minimum.

We know however that ε is a infinitesimal small quantity, which the smaller it becomes, the more the number of the possible alive forces approaches a continuum. .

However for infinitesimal ε we can write sums occurring in the equations (22), (23) and (24) in the form of certain integrals, and get the following equations

$$M' = \int_0^\infty f(x)\ell f(x)dx \quad (25)$$

$$n = \int_0^\infty f(x)dx \quad (26)$$

$$L = \int_0^\infty x f(x)dx \quad (27)$$

Sucht man diejenige Form der Function $f(x)$, welche den Ausdruck (25) unter den Nebenbedingungen (26) und (27) zu einem Minimum macht, so hat man bekanntlich folgendermassen zu verfahren:

Man addirt zur rechten Seite der Gleichung (25) die rechten Seiten der beiden Gleichungen (26) und (27), letztere beide mit je einem constantem Factor k und h multiplicirt.

Die so entstandene Summe

If one looks for the function $f(x)$, which minimizes the expression (25) under the auxiliary conditions (26) and (27), then one has to proceed as follows as well known:

One adds to the right side of the equation (25) the right side of the two equations (26) and (27), after having multiplied each of them with a constant factor k and h .

One subjects now the sum developed in such a way

$$\int_0^\infty [f(x)\ell f(x) + kf(x) + hxf(x)]dx$$

unterwirft man nun der variation, wobei x die independent Variable, f die der Variation zu unterwerfende Function ist .
Dadurch ergibt sich

to the variation, whereby x is an independent variable, f is the function which can be subjected to variation.
Thus arises

$$\int_0^\infty [\ell f(x) - k + 1 + hx]\delta f(x)dx.$$

Setzt man die Grösse, welche mit $\delta f'x$ multiplicirt ist, also den Ausdruck in der eckigen Klammer = 0, und bestimmt aus der so erhaltenen Gleichung die Function $f(x)$, so ergibt sich

If one sets the quantity , which is multiplied by $\delta f(x)$, thus the expression in the square bracket = 0, it determines from the equation obtained in this way the function $f(x)$, then arises

$$f(x) = Ce^{-hx} \tag{28}$$

Hiebei wurde zur Abkürzung die Constante e^{-k-1} mit C bezeichnet.
Die zweite Variation von M' ist

Here for abbreviation the constant e^{-k-1} was named C .
The second variation of M' is

$$\delta^2 M' = \int_0^\infty \frac{[\delta f(x)]^2}{f(x)}.dx,$$

eine notwendig positive Grosse, da $f(x)$ für alle zwischen 0 und ∞ liegenden Werthe von x positiv ist.

a necessarily positive quantity, since $f(x)$ is positive for all values of x being situated between 0 and ∞

Es ist also M' ein Minimum im Sinne der Variationsrechnung.

M' is thus a minimum in the sense of the variation calculation.

Die Gleichung (28) würde uns das Resultat liefern, dass für den Fall des Wärmegleichgewichtes die Wahrscheinlichkeit, dass die lebendige Kraft eines Moleküls zwischen den Grenzen x und $x + dx$ liege, den Werth

The equation (28) would supply the result to us that for the case of the warming equilibrium the probability that the alive force of a molecule is situated between the boundaries x and $x + dx$, has the value

$$f(x)dx = Ce^{hx} dx.$$

hat.Die Wahrscheinlichkeit, dass die Geschwindigkeit eines Moleküls zwischen den Grenzen ω und $\omega + d\omega$ liegt, wäre also

The probability that the velocity of a molecule is situated between the boundaries ω and $\omega + d\omega$, would thus be

$$Ce^{-\frac{hm\omega^2}{2}}.m\omega d\omega \tag{29}$$

m soll immer die Masse eines Moleküls bezeichnen.

m is to always name the mass of a molecule.

Die Formel (29) liefert die richtige Zustandsvertheilung für elastische Kreise die sich in einer Fläche von zwei Dimensionen bewegen, oder elastische Kreiscylinder mit parallelen Axen, die sich im Raume bewegen, nicht aber für elastische Kugeln, die sich im Raume bewegen.

The formula (29) supplies the correct state distribution for elastic circles moving in a two dimensions surface, or elastic circular cylindres with parallel axis moving in the space, but not for elastic balls, moving in the space.

Für letztere muss die Exponentialfunction mit $\omega^2 d\omega$ statt mit $\omega d\omega$ multiplicirt sein.

For the latters the exponential function must be multiplied by $\omega^2 d\omega$ instead of $\omega d\omega$.

Um die für diesen letzteren Fall passende Zustandsvertheilung zu erhalten, müssen wir die ursprüngliche Vertheilung der Zettel in der Urne, aus welcher die verschiedenen Complexionen gezogen wurden; in anderer Weise wählen.

Wir nahmen bisher an, in dieser Urne seien gleich viel Zettel, auf denen eine zwischen 0 und ε liegende lebendige Kraft aufgeschrieben steht, als Zettel, auf denen eine zwischen ε und 2ε liegende lebendige Kraft aufgeschrieben ist.

Ebenso gross sollte auch die Zahl der Zettel mit einer zwischen 2ε und 3ε , zwischen 3ε und 4ε u. s. w. liegenden lebendigen Kraft sein.

Jetzt dagegen wollen wir annehmen, dass nicht die lebendige Kraft, sondern die drei Geschwindigkeitscomponenten u, v, w in der Richtungen der drei Coordinatenachsen, auf den in der Urne enthaltenen Zetteln aufgeschrieben sind.

Und zwar soll gleich sein : die Zahl der Zettel, für welche u zwischen 0 und ε , v zwischen 0 und ζ , w zwischen 0 und η liegt ;

ferner die Zahl der Zettel, für welche u zwischen ε , und 2ε , v zwischen ζ und 2ζ , w zwischen 0 und η liegt, ganz allgemein : die Zahl der Zettel, für welche u, v, w zwischen den Grenzen u und $u + \varepsilon$, v und $v + \zeta$, w und $w + \eta$ liegen.

Dabei sind u, v, w beliebige Grösse, ε, ζ, η dagegen sind gegebene constante, aber ausserordentlich kleine Grössen.

Wenn wir bis auf diese eine Modification das ganze Problem unverändert lassen so gelangen wir zur Zustandsvertheilung, welche sich in Wirklichkeit unter Gasmolekülen herstellt.

REMARQUE

Wir können natürlich gleich von vorneherein statt der Grossen ε, ζ, η welche ja als verschwindend angenommen werden, du, dv, dw schreiben, und müssten dann sagen :

Die Vertheilung der Zettel in der Urne muss so sein, dass die Zahl derjenigen Zettel, für welche u, v, w zwischen u und $u + du$, v und $v + dv$, w und $w + dw$ liegen, dem Producte $du dv dw$ proportional, aber vom Werthe der Grössen u, v, w unabhängig ist.

Die frühere Vertheilung der Zettel in der Urne dagegen, kann, indem man dx statt ε schreibt, dadurch charakterisirt werden, dass man sagt :

In order to get the state distribution fitting for this latter case, we must choose in other way the original distribution of the tickets in the urn, from which the different complexions were pulled.

We assumed so far, that in this urn are as many tickets, on which is noted the alive force being situated between 0 and ε , as tickets, on which is noted the alive force which is situated between ε and 2ε .

Just as large should also be the number of the tickets with alive force being situated between 2ε and 3ε , between 3ε and 4ε etc.

Now on the other hand, we want to assume that it is not the alive force, but the three velocity distribution u, v, w in the directions of the three coordinate axis, that are noted on the tickets contained in the urn.

Should be alike: the number of the tickets, for which u is situated between 0 and ε , v between 0 and ζ , w between 0 and η ;

furthermore the number of the tickets, for which u is between ε and 2ε , v between ζ and 2ζ , w for between η and 2η (??); in general : the number of the tickets, for which u, v, w are situated between the boundaries u and $u + \varepsilon$, v and $v + \zeta$, w and $w + \eta$.

If u, v, w are any quantities, ε, ζ, η are given constants, but of extraordinarily small values.

If we let the whole problem unchanged up to this modification we arrive in such a way to the state distribution, which produces itself in reality among gas molecules.

Naturally from the beginning, we can write du, dv, dw instead of the quantities ε, ζ, η which are assumed as infinitesimal, and then we would have :

The distribution of tickets in urn must be so that the number of tickets, for which u, v, w are situated between u and $u + du$, v and $v + dv$, w , and $w + dw$ is proportional to the product $du dv dw$, but independent of the value of the quantities u, v, w .

On the other hand, the earlier distribution of the tickets in that urn, can be characterized by writing dx instead of ε , by the fact that one says:

es waren auf gleich vielen Zetteln aufgeschrieben : lebendige Kräfte, die zwischen 0 und dx , solche, die zwischen dx und $2dx$ solche, die zwischen $2dx$ und $3dx$ u. s. w. liegen .

Bezeichnen wir jetzt mit

were noted on equal many tickets: the alive forces situated between 0 and dx ; between dx and $2dx$, between $2dx$ and $3dx$ etc.

We define now with

$$w_{abc} = \varepsilon\zeta\eta f(a\varepsilon, b\zeta, c\eta) \tag{30}$$

die Zahl der in irgend einer Complexion vorkommenden Moleküle, für welche die Geschwindigkeitscomponenten zwischen den Grenzen $a\varepsilon$ und $(a + 1)\varepsilon$, $b\zeta$ und $(b + 1)\zeta$, $c\eta$ und $(c + 1)\eta$ liegen,

so ist die Zahl der Permutationen, deren die Elemente dieser Complexion fähig sind, also die Permutabilität der Zustandsvertheilung zu welcher diese Complexion führt

the number of molecules occurring in a possible complexion, for which the velocity component are situated between the boundaries $a\varepsilon$ and $(a + 1)\varepsilon$, $b\zeta$ and $(b + 1)\zeta$, $c\eta$ and $(c + 1)\eta$,

so that the number of the permutations, which are possible among the items of these complexions, thus the permutability of the state distribution to which this complexion leads is

$$B = \frac{n!}{\prod_{a=-p}^{a=+p} \prod_{b=-q}^{b=+q} \prod_{c=-r}^{c=+r} w_{abc}!} \tag{31}$$

wobei wir zunächst annehmen, u vermöge nur Werthe von $-p\varepsilon$ bis $p\varepsilon$, v solche von $-q\zeta$ bis $+q\zeta$, w solche von $-r\eta$ bis $+r\eta$ anzunehmen.

Für die wahrscheinlichste Zustandsvertheilung muss wieder dieser Ausdruck, oder wenn man will, dessen Logarithmus ein Maximum sein. Vertauscht man wieder

where we assume first that, u can only take values from $-p\varepsilon$ to $p\varepsilon$, v from $-q\zeta$ to $+q\zeta$ w from $-r\eta$ to $+r\eta$.

again, for the most probable state distribution, this expression, or if one wants, its logarithm must be a maximum. If one exchanges again

$$n! \text{ by } \sqrt{2\pi} \left[\frac{n}{e}\right]^n \text{ and } w! \text{ by } \sqrt{2\pi} \left[\frac{w}{e}\right]^w$$

wobei man übrigens den Factor $\sqrt{2\pi}$ sogleich weglassen kann, weil jeder dieser Factoren zu ℓB nur den constanten addenden $-\frac{1}{2}\ell(2\pi)$ liefert, so erhält man als Bedingung für die wahrscheinlichste Zustandsvertheilung, dass der Ausdruck

where one can by the way omit the factor $\sqrt{2\pi}$ immediately, because one supplies this factor in ℓB by only adding the constant $-\frac{1}{2}\ell(2\pi)$, then one gets as condition for the most probable state distribution so that the expression

$$-\sum_{a=p}^{a=+p} \sum_{b=q}^{b=+q} \sum_{c=r}^{c=+r} w_{abc} \ell w_{abc}$$

ein Maximum werden soll, welches sich nur durch einen constanten Addenden von ℓB unterscheidet, da auch die constante Grösse $n\ell n$ weggelassen wurde.

Die beiden Bedingungsgleichungen aber, welche ausdrücken, das die Zahl der Moleküle = n , und deren lebendige Kraft = L sein muss, erhalten folgende Form :

will be a maximum, which only differs from ℓB by the addition of a constant, since also the constante quantity $n\ell n$ was omitted.

However the two equations of conditions, which express, that the number of those molecules = n , their alive force = L , must take the following form:

$$n = \sum_{a=-p}^{a=+p} \sum_{b=-q}^{b=+q} \sum_{c=-r}^{c=+r} w_{abc} \tag{32}$$

$$L = \frac{m}{2} \sum_{a=-p}^{a=+p} \sum_{b=-q}^{b=+q} \sum_{c=-r}^{c=+r} (a^2\varepsilon^2 + b^2\zeta^2 + c^2\eta^2) w_{abc} \tag{33}$$

Setzt man für w_{abc} seinen Werth aus Gleichung (30) ein, so sieht man sogleich ein, dass die dreifachen Summen, nachdem man noch einen constanten Addenden unterdrückt hat, in dreifache bestimmte Integrale übergehen, wodurch man für die Grösse, welche ein Maximum werden soll, den Werth erhält :

$$\Omega = - \int_{-\infty}^{-\infty} \int_{-\infty}^{-\infty} \int_{-\infty}^{-\infty} f(u, v, w) \ell f(u, v, w) dudvdw \quad (34)$$

die beiden Bedingungsgleichungen aber gehen über in :

$$n = \int_{-\infty}^{-\infty} \int_{-\infty}^{-\infty} \int_{-\infty}^{-\infty} f(u, v, w) dudvdw \quad (35)$$

$$L = \frac{m}{2} \int_{-\infty}^{-\infty} \int_{-\infty}^{-\infty} \int_{-\infty}^{-\infty} (u^2 + v^2 + w^2) f(u, v, w) dudvdw \quad (36)$$

Wir wollen diese Grösse Ω , welche nur durch einen constanten Addenden vom Logarithmus der Permutabilität verschieden ist, und welche für die Folge einen besondere Wichtigkeit hat, als das Permutabilitätsmass bezeichnen.

Ich bemerke übrigens, dass die Unterdrückung dieser Constanten noch den Vortheil hat, dass dadurch bewirkt wird, dass das gesammte Permutabilitätsmass des Verins zweier Körper gleich der Summe der Permutabilitätsmasse jedes einzelnen Körpers ist.

Es ist also das Maximum der Grösse (34) unter den Nebenbedingungen (35) und (36) zu suchen.

Die Auflösung dieses Problems braucht hier nicht weiter auseinandergesetzt zu werden;

denn dasselbe ist ein specieller Fall desjenigen Problems, welches ich bereits in meiner Abhandlung "Ueber das Wärmegleichgewicht von Gasenn auf welches äussere Kräfte wirken" in dem Abschnitte behandelt habe, welcher unmittelbar dem Anhange vorhergeht.

Ich habe dort schon den Nachweis geliefert, dass es auf diejenige Zustandsvertheilung führt, welche in der That dem Zustande des Wärmegleichgewichtes entspricht.

Man sieht also, dass man in der That berechtigt ist, zu sagen :

diejenige Zustandsvertheilung, welche unter allen die wahrscheinlichste ist, entspreche auch dem Zustande des Wärmegleichgewichtes.

Denn wenn eine Urne in der zuletzt besprochenen Weise mit Zetteln gefüllt wird, so wird es am wahrscheinlichsten sein, das auf den gezogenen Zetteln die dem Wärmegleichgewichte entsprechende Zustandsvertheilung aufgeschrieben ist.

If one takes for w_{abc} its value from equation (30), then one sees immediately that the triple sums, after one suppressed still another added constant change into triple integrals, whereby one obtains the value of the quantity, which is to become a maximum

however the two condition equations transform into:

We want to name the "permutability mass" this quantity ω , which differs from the logarithm of the permutability only by addition of a constant, and which has a special importance for the following development, .

I by the way notice that the suppression of these constants has also the consequence(?) that the total permutability mass of two bodies is equal to the sum of the permutability masses of each individual body.

Thus the maximum of the quantity (34) under the secondary conditions (35) and (36) is to be looked up.

The resolution of this problem does not need to be discussed here any further ;

because it is a special case of that problem, which I already treated more in details in my paper "On the heat equilibrium of Gases on which outside forces work" in that paragraph, which precedes directly the appendix .

I already supplied the proof there that it leads on that state distribution which corresponds indeed to the heat equilibrium.

One sees thus that one is indeed entitled to say:

that state distribution, which is the most probable among all, corresponds also to the heat equilibrium.

Because if one fills an urn with tickets in that last discussed way, then it will be most probable, that on the pulled tickets is noted that state distribution corresponding to heat equilibrium

Ich glaube aber nicht, das man berechtigt ist, dies ohne Weiteres als etwas Selbstverständliches hinzustellen, mindestens nicht, ohne vorher sehr genau definirt zu haben, was eigentlich unter der wahrscheinlichsten Zustandsvertheilung zu verstehen ist.

Würde man z. B. in dieser Definition nur die kleine Modification eintreten lassen, dass man die Urne in der zuerst beschriebenen Weise mit Zetteln gefüllt sein liesse, so würde der Satz bereits falsch sein.

Der Grund, wesshalb gerade die eine Vertheilung der Zettel zur richtigen Zustandsvertheilung führt, wird demjenigen, der sich eingehender mit derartigen Problemen beschäftigt hat, wohl nicht entgehen.

Derselbe liegt nämlich in folgendem Umstande :

Wenn wir alle Moleküle zusammenfassen, deren Coordinaten zu einer bestimmten Zeit zwischen der Grenzen

$$\varepsilon \text{ and } \varepsilon + d\varepsilon, \eta \text{ and } \eta + d\eta, \xi \text{ and } \xi + d\xi \tag{37}$$

und deren Geschwindigkeitscomponenten zwischen den Grenzen

$$u \text{ and } u + du, v \text{ and } v + dv, w \text{ and } w + dw \tag{38}$$

liegen, und alles diese Moleküle mit einem bestimmten Moleküle unter gegebenen Verhältnissen zusammenstossen lassen, so sollen deren Coordinaten nach einer ganz bestimmten Zeit zwischen den Grenzen

$$\Xi \text{ and } \Xi + d\Xi, H \text{ and } H + dH, Z \text{ and } Z + dZ \tag{39}$$

deren Geschwindigkeitscomponenten zwischen den Grenzen

$$U \text{ and } U + dU, V \text{ and } V + dV, W \text{ and } W + dW. \tag{40}$$

Es ist dann immer

$$d\varepsilon d\xi d\eta d\alpha d\beta d\gamma d\delta d\epsilon d\zeta d\eta d\theta d\iota d\kappa d\lambda d\mu d\nu d\omega = d\Xi dH dZ dU dV dW \tag{41}$$

Dieser Satz gilt noch viel allgemeine.

Mögen zu Zeit Null die Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten beliebiger Moleküle (materieller Punkte) zwischen den Grenzen (37) und (38) liegen, mögen auf diese Moleküle beliebige Kräfte wirken nach Verlauf einer und derselben Zeit t mögen die Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten sämmtlicher Moleküle zwischen den Grenzen (39) und (40) liegen, es ist dann jedesmal die Gleichung (41) erfüllt.

I do not believe however, that one is entitled to put this as something natural at least not easily, without having defined before very exactly, which is actually to be understood as the most probable state distribution.

If one would let occur e.g. in this definition only the small modification that one would let the urn be filled with tickets in the way described first, then the assertion would be already false.

The reason, why only some distributions of the ticket leads to the correct state distribution, probably will not escape (???)

The same reason appears in the following circumstance:

If we consider all molecules, having at a certain time their coordinates situated between the boundaries

and their velocity components between the boundaries

and everything leave these molecules to collide with certain molecules under given conditions, then their Coordinates are after one completely determined time between the boundaries

however their velocity components are situated between the boundaries

It then always is

This result applies still in a general way.

If the coordinates and velocity components of any molecules (material points) may be situated between the boundaries (37) and (38) at time zero, any forces may affect these molecules and after process (?) at time t the coordinates and velocity components of similar (?) molecules will be situated between the boundaries (39) and (40), then the equation (41) is each time fulfilled.

(Vollkommen ausführlich, exact ausgesprochen und sehr einfacher Weise begründet findet man diesen und einen noch allgemeineren Satz in dem Buch von Watson "A Treatise on the kinetic theory of gases" S. 12.) (One finds this justified exactly, perfectly detailed and expressed in a very simple way and a still more general result in the book of Watson "A Treatise on the kinetic theory of gases," P. 12.)

Würde man dagegen statt der Geschwindigkeitscomponenten vor und nach der Einwirkung der Kräfte die lebendige Kraft x und zwei die Geschwindigkeitsrichtung bestimmende Winkel α und β einführen, und würden vor der Einwirkung der Kräfte diese Größen zwischen den Grenzen

If one would introduce the alive force x and the two angles determining the velocity direction α and β , instead of the velocity components before and after the effect of the forces these quantities are between the boundaries

$$\begin{aligned} &\xi \text{ and } \xi + d\xi, \eta \text{ and } \eta + d\eta, \zeta \text{ and } \zeta + d\zeta \\ &x \text{ and } x + dx, \alpha \text{ and } \alpha + d\alpha, \beta \text{ and } \beta + d\beta, \end{aligned}$$

nach dem Einwirken der Kräfte aber zwischen den Grenzen

after the effect of the forces however they are situated between the boundaries,

$$\begin{aligned} &\Xi \text{ and } \Xi + d\Xi; H \text{ and } H + dH, Z \text{ and } Z + dZ \\ &X \text{ and } X + dX, A \text{ and } A + dA, B \text{ and } B + dB, \end{aligned}$$

liegen,so würde

thus it would be

$$d\xi d\eta d\zeta \sqrt{x} dx \varphi(\alpha, \beta) d\alpha d\beta = d\Xi dH dZ \sqrt{X} dX \varphi(A, B) dA dB$$

Es geht also das Product der Differentiale $dudvdw$ direct in $dUdVdW$ über.

Thus the product of the differentials $dudvdw$ becomes directly $dUdVdW$.

Desshalb müssen die Zettel der Urne so gewählt werden, dass gleich viele mit Geschwindigkeitscomponenten beschrieben sind, die zwischen u und $u + du$, v und $v + dv$, w und $w + dw$ liegen, was immer u, v, w für Werthe haben mögen.

Then the tickets of the urn must be selected in such a way that there are as many velocity componenets situated between u and $u + du$, v and $v + dv$, w and $w + dw$, whatever the value of u, v, w .

überhaupt muss, wenn die Position durch irgend welche Coordinaten bestimmt wird, die Geschwindigkeit durch die entsprechenden "Momente" bestimmt werden. Dagegen geht $\sqrt{x}dx$ in $\sqrt{X}dX$ über.

Generally, if the positions are determined by coordinates, the velocity must be determined by the appropriate "moments" On the other hand $\sqrt{x}dx$ changes into $\sqrt{X}dX$.

Bei Einführung der lebendigen Kraft müsste man also die Zettel so wählen, dass gleichviele mit lebendigen Kräften beschrieben sind, welche zwischen x und $\sqrt{x}dx$ liegen wobei dx constant x aber vollkommen willkürlich ist.

During the introduction of the alive force one would have to thus select the tickets in such a way that as many are described with alive forces situated between x and $\sqrt{x}dx$ whereby dx is constant but x is perfectly arbitrary.

Mit Anwendung dieses zuletzt erwähnten Satzes könnte man mit Zuziehung der in meine " Bemerkungen über einige Probleme der mechanischen Wärmethorie" auf S. des Separatabdruckes entwickelten Principien auch einen directen Beweis herstellen, dass diese Art und Weise, die wahrscheinlichste Zustandsvertheilung zu finden, die allein zulässige ist, und auf die richtige dem Zustande des Wärmegleichgewichtes entsprechende Zustandsvertheilung führen muss, während wir uns hier a posteriori überzeugt haben, dass gerade die auf die richtige Zustandsvertheilung führt, und daraus schlossen, das die dem Wärmegleichgewichte entsprechende Zustandsvertheilung in unserem Sinne die wahrscheinlichste ist

Es ist natürlich leicht, in gleicher Weise auch die Fälle zu betrachten, wo nebst der Bedingung der Erhaltung der lebendigen Kraft noch andere Bedingungen gegeben sind Stellen wir z. B. das Problem so :

unter einer gegebenen, natürlich sehr grossen Anzahl von Molekülen sind die Geschwindigkeitscomponenten u, v, w so zu vertheilen, dass 1. die Summe der lebendigen Kraft aller Moleküle eine gegebene Grösse ist; 2. die Componente der Geschwindigkeit des gemeinsamen Schwerpunktes aller Moleküle in der Richtung der x -Axe; 3. die in der Richtung der y -axe, 4. die in der Richtung der z -axe; eine gegebene Grösse ist

Es entsteht die Frage, welches ist die warscheinlichste Vertheilung der Geschwindigkeitscomponenten unter den Molekülen, wobei dieser Begriff natürlich wieder in demselben Sinne wie früher gefasst ist.

Wir erhalten dann ganz dasselbe Problem, nur dass an die Stellung der einen Bedingungsgleichung deren vier treten.

Die Auflösung desselben liefert uns für de wahrscheinlichste Zustandsvertheilung

$$f(u, v, w) du dv dw = C e^{-h[(u-\alpha)^2 + (v-\beta)^2 + (w-\gamma)^2]}$$

wo $C, h, \alpha, \beta, \gamma$ Constanten sind.

Dies ist in der That die Zustandsvertheilung in einem Gase, das sich im Wärmegleichgewichte bei constanter Temperatur befindet, dessen gesammte Masse aber nicht in Ruhe ist, sondern sich mit einer bestimmten constanten Geschwindigkeit

With application of this last mentioned result one could also construct with the principe developed in my " remarks over some problems of the mechanical heat theory " on S. 10 of the separate print a direct proof in order to find the most probable state distribution which is the only admissible and to which must lead the correct state distribution corresponding to the heat equilibrium , while we convinced ourselves here a posteriori that it leads to the correct state distribution , and when this is solved (?), that state distribution corresponding to heat equilibrium is in our sense the most probable (??...)

It is naturally easy to consider in the same way also the cases where together with the condition corresponding to the preservation of the alive force, still different conditions are given . We place e.g. the problem in such a way:

Among a given, naturally very large number of molecules the velocity components, u, v, w are distributed so that 1. the total of the alive force of all molecules has a given value, 2. the components of the velocity of the common barycenter of all molecules in the direction x -Axe 3. those in the direction the y -axe, 4. those in the direction the z -axe, have a given value.

Comes the question : which is the most probable distribution of the velocity components among the molecules, whereby this term is naturally again in the same sense composed (?) as previously.

Then we obtain exactly the same problem, except that there are four equations of conditions.

The same resolution supplies us for the most probable state distribution

where $C, h, \alpha, \beta, \gamma$ are constants.

This is indeed the state distribution in a gas, which is in heat equilibrium at constant temperature, whose global mass is however not at rest , but moves itself with a certain constant speed.

Man könnte übrigens, wenn man noch andere passende Bedingungsgleichungen hinzufügt, in derselben Weise auch noch andere Problemen behandeln so z. B. das der Rotation eines Gases, ferner alle in meinen Abhandlung "über die Aufstellung und Integration der Gleichungen, welche die Molekularbewegung in Gasen bestimmen", betrachteten Fälle.

Betreffs des Übergangs vom Ausdrucke (31) zum Ausdrucke (34) soll hier noch Einiges bemerkt werden.

Die Formel für $x!$ lautet vollständig

$$\sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e}\right)^x e^{\frac{1}{12x} + \dots}$$

Die Substitution dieses Werthes in der Formel (31) liefert also zunächst

$$B = \frac{\sqrt{2\pi n} n^{n+\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{1}{12n} + \dots}}{(2\pi)^{p+q+r+\frac{3}{2}} \prod_{a=-p}^{a+p} \prod_{b=-q}^{b+q} \prod_{c=-r}^{c+r} (w_{abc})^{w_{abc} + \frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{1}{12w_{abc}} + \dots}}$$

woraus folgt

$$\begin{aligned} \ell B &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \ell n + \frac{1}{12n} + \dots - (p+q+r+1)\ell(2\pi i) \\ &- \sum_{a=-p}^{a+p} \sum_{b=-q}^{b+q} \sum_{c=-r}^{c+r} \left[(w_{abc})^{w_{abc} + \frac{1}{2}} \ell w_{abc} + \frac{1}{12w_{abc}} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Nun muss zuvörderst beachtet werden, dass gemäss unserer Definition bei Bestimmung der Grösse B immer zuerst angenommen werden muss, die Zahl der Moleküle, also n und damit auch w_{abc} wachse immer mehr, dann erst darf man die Grössen ε, ζ, η abnehmen lassen, welche letztere von anderer Qualität unendlich klein sind.

Es verschwinden daher alle Glieder, welche n oder w_{abc} in Nenner haben und auch die Grösse $\frac{1}{2}$ kann im Ausdrucke $w_{abc} + \frac{1}{2}$ vernachlässigt werden.

Denn die Glieder, welche die Grösse w_{abc} liefert, verhalten sich zu denen, welche die Grösse $\frac{1}{2}$ liefert, wie Grössen, welche sich auf die ganze Gasmasse beziehen, zu Grössen, welche sich nur auf ein einzelnes Molekül beziehen.

Die letzteren Grössen können aber vernachlässigt werden, weil wir annehmen, dass die Anzahl der Moleküle immermehr und mehr wächst, so dass ein einzelnes Molekül dagegen immer mehr und mehr verschwindet. Man erhält daher zunächst

By the way, if one adds still different suitable equations of conditions, one could still also treat different problems in the same way so e.g. that the rotation of a gas, ; this is detailed in the cases considered in my paper "over the solution and integration of the equations, which determine the molecular movement in gases"

Still something is to be noticed here concerning of the transition of the expression (31) to the expression (34).

The formula for $x!$ is

The substitution of this value in the formula (31) supplies thus first

from what follows

Now in first place (?) in accordance with our definition, the determination of the quantity B must be always first assumed, the number of the molecules must be considered, thus n and concomitantly w_{abc} grow ever more, then only one may decrease the sizes ε, ζ, η , which will be later set infinitely small from other considerations.

All terms which have n or w_{abc} in their denominators therefore, disappear and also the quantity $\frac{1}{2}$ can be neglected in the expression $w_{abc} + \frac{1}{2}$.

because the terms, which supply the quantities w_{abc} , behave to those, which supply the quantity $\frac{1}{2}$, as quantities, which refer to the whole gas mass, to quantities, which refer only to an individual molecule.

The last quantities can be neglected however, because we assume that the number of molecules grows always more and more, so that an individual molecule disappears against it always more and more. One gets therefore first

$$\ell B = n \ell n - (p+q+r+1)\ell(2\pi) - \sum_{a=-p}^{a+p} \sum_{b=-q}^{b+q} \sum_{c=-r}^{c+r} w_{abc} \ell w_{abc}$$

Substituirt man hier für w_{abc} den Ausdruck $\varepsilon\zeta\eta f(a\varepsilon, b\zeta, c\eta)$ so ergibt sich

if one substitutes for w_{abc} the expression $\varepsilon\zeta\eta f(a\varepsilon, b\zeta, c\eta)$ here results in such a way

$$\begin{aligned} \ell B &= n\ell n - (p + q + r + 1)\ell(2\pi) - n\ell(\varepsilon\zeta\eta) \\ &- \sum_{a=-p}^{a=+p} \sum_{b=-q}^{b=+q} \sum_{c=-r}^{c=+r} \varepsilon\zeta\eta f(a\varepsilon, b\zeta, c\eta)\ell f(a\varepsilon, b\zeta, c\eta), \end{aligned} \tag{42}$$

Man sieht hier, dass bis auf die dreifache Summe alle Grössen der rechten Seite dieses Ausdruckes constant sind; lässt man daher diese Constanten weg, und lässt nun auch die Grössen $\varepsilon\zeta\eta$ immer mehr und mehr abnehmen pqr dagegen ins Unendliche wachsen, so verwandelt sich die 3fache Summe in ein 3faches bestimmtes von $-\infty$ bis $+\infty$ zu nehmendes bestimmtes Integrale und man gelangt sofort von ℓB zu dem durch Formel (34) gegebenen Ausdrucke des Permutabilitätsmasses Ω .

One sees here that up to the triple sum, all quantities on the right side of this expression are constant; if one omits therefore this constant, and lets now also the quantities ε, ζ, η to always decrease more and more pqr against it grow in the infinite, then those triple sums transform themselves into triple integrals determined from $-\infty$ to $+\infty$ which can be considered definite (?) and one arrives immediately from ℓB to the expression of the permutability masses ω given by formula (34).

Am bedenklichsten könnte hiebei die Voraussetzung erscheinen, dass w_{abc} sehr gross im Vergleiche mit $\frac{1}{2}$ ist d. h. dass die Anzahl der Moleküle sehr gross ist, deren Geschwindigkeitscomponenten zwischen den Grenzen $a\varepsilon$ und $(a + 1)\varepsilon$, $b\zeta$ und $(b + 1)\zeta$, $c\eta$ und $(c + 1)\eta$ liegen welche identisch mit den Grenzen u und $u + du$, v und $v + dv$, w und $w + dw$ sind.

Here could appear most precarious the prerequisite that w_{abc} is very large in comparisons with $\frac{1}{2}$ i.e. that the number of molecules is very large, their velocity components being situated between the boundaries $a\varepsilon$ and $(a + 1)\varepsilon$, $b\zeta$ and $(b + 1)\zeta$, $c\eta$ and $(c + 1)\eta$ which are identical to the boundaries u and $u + du$, v and $v + dv$, w and $w + dw$.

Es mag dies für dem ersten Anblick befremden, da die Zahl der Gasmoleküle, wenn auch gross, so doch endlich ist, während du, dv, dw mathematische Differentiale sind.

This may appear strange for the first sight, since the number of the gas molecules, although large, is so nevertheless finite, while du, dv, dw are mathematical differentials.

Doch muss diese Annahme bei näherer Überlegung als selbstverständlich bezeichnet werden. Denn alle Anwendungen der Differentialrechnung auf die Gasthorie beruhen auf derselben Annahme.

But this acceptance must be naturally defined during closer consideration. Because all applications of differential calculus to the gas theory are based on the same acceptance.

Will man z. B. die Diffusion, innere Reibung, Wärmeleitung, etc. berechnen, so nimmt man ebenfalls an dass in jedem unendlich kleinem Volumelemente $dx dy dz$ sich noch unendlich viele Gasmoleküle befinden, deren Geschwindigkeitscomponenten zwischen den Grenzen u und $u + du$, v und $v + dv$, w und $w + dw$ liegen.

If one wants to calculate e.g. diffusion, internal friction, thermal conduction, etc., then one takes oneself likewise in each infinitely small volume elements $dx dy dz$ still infinitely many gas molecules, their velocity components being situated between the boundaries u and $u + du$, v and $v + dv$, w and $w + dw$.

Die obige Annahme besagt weiter nichts, als dass man die Grenzen für u, v, w so weit nehmen kann, dass bereits sehr viele Moleküle dazwischen liegende Geschwindigkeitscomponenten haben, und trotzdem noch alle diese Moleküle so ansehen kann, als ob sie mit denselben Geschwindigkeitscomponenten begabt wäre

The above acceptance does not mean anything more, than one can take the boundaries for u, v, w that already very many molecules being situated between them have velocity components, and nevertheless one can still regard these molecules as if they would be assigned the same velocity components.

3 III. Betrachtung mehratomiger Gasmoleküle und äusserer Kräfte.

III. Analysis of (?) gas molecules of several atoms and outside forces.

Ich will nun die bisher erhaltenen Formeln verallgemeinern, indem ich zuerst zu sogenannten mehratomigen Gasmolekülen übergehe, und dann auch äussere Kräfte einführe, wodurch endlich der Übergang zu ganz beliebigen festen und flüssigen Körpern wenigstens angebahnt wird. Um nicht eine zu grosse Mannigfaltigkeit der zu betrachtenden Fälle zu erhalten, will ich mich hierbei immer nur auf den wichtigsten Fall einlassen, dass ausser der Gleichung der lebendigen Kraft keine weiteren Bedingungsgleichungen gegeben sind

Eine erste Verallgemeinerung kann an unseren Formeln ohne all Schwierigkeit angebracht werden. Wir nahmen bisher an, dass jedes Molekül eine elastische Kugel oder ein materieller Punkt sei, oder noch allgemeiner, dass seine gesammte Lage im Raume durch drei Variable bestimmbar sei (z. B. die drei rechtwinkeligen Coordinaten).

Man weiss, dass dies bei den wirklichen Gasmolekülen nicht der Fall ist.

Wir wollen daher annehmen, zur vollständigen Bestimmung der Lage aller Theile eines Moleküls im Raume seien drei Variable nicht hinreichend, es seien vielmehr dazu r Variable erforderlich

$$p_1, p_2, p_3, \dots p_r,$$

die sogenannten generalisirten Coordinaten (*generalized coordinates*).

Drei derselben, p_1, p_2, p_3 sollen die rechtwinkeligen Coordinaten des Schwerpunktes des Moleküls sein, die übrigen können entweder Coordinaten der einzelnen Atome, relativ gegen den Schwerpunkt, oder Richtungswinkel, oder was immer für Bestimmungstücke der Lage des gesammten Moleküls oder eines Theiles desselben sein.

Wir wollen uns nun auch von der Beschränkung frei machen, dass nur eine einzige Gattung von Gasmolekülen im Raume vorhanden sei.

wir nehmen vielmehr an, es sei noch eine zweite Gattung vorhanden, von welcher jedes Molekül die generalisirten Coordinaten

$$p'_1, p'_2, p'_3, \dots p'_{r'},$$

ebenso eine dritte Gattung, mit den generalisirten Coordinaten

$$p''_1, p''_2, p''_3, \dots p''_{r''},$$

I want to generalize now the formulas obtained so far, by turning into first to so-called gas-molecules with several atoms, and then also introduce outer forces, whereby the transition is finally initiated at least to almost any solid and liquid bodies. In order not to get an excessive diversity of the cases which can be regarded, here I want to consider only the most important cases where there are no further conditions on the equation on the alive force

A first generalization can be attached to our formulas without any difficulty. We assumed so far that each molecule was a flexible ball or a material point, or not more generally that its position in the space is assignable by three variable (e.g. the three cartesian coordinates).

One knows that this is not the case with the real gasmolecules.

We want to assume therefore, since three variable are not sufficient for the complete determination of the position of all components of a molecule in the space, it is rather necessary for that to use r variable

$$p_1, p_2, p_3, \dots p_r,$$

the so-called generalized coordinates

The three first, p_1, p_2, p_3 should be the cartesian coordinates of the barycenter of the molecule, those remaining can be either coordinates of the individual atoms, relative to that barycenter, or azimuth angle, or other parameters in order to characterize the position of the whole (?) molecule or its components.

Now we want to make ourselves free also by the limitation that only one kind of gas molecules is available in the space.

We assume also that there is still another second kind available, for which each molecule has the generalized coordinates

$$p'_1, p'_2, p'_3, \dots p'_{r'},$$

likewise a third kind, with the generalised coordinates

$$p''_1, p''_2, p''_3, \dots p''_{r''},$$

im Ganzen seien $\nu + 1$ verschiedene Molekül-
gattungen.

die generalisirt Coordinaten der letzten Gat-
tung sein :

$$p_1^{(\nu)}, p_2^{(\nu)}, p_3^{(\nu)}, \dots, p_{r^{(\nu)}}^{(\nu)},$$

Die drei ersten Coordinaten sollen immer
rechtwinkelige Schwerpunktscoordinaten sein.

Natürlich ist jetzt die Annahme notwendig,
dass von jeder einzelnen Gattung sehr viele
Moleküle vorhanden sind.

Wir wollen dann mit ℓ die gesammte lebendige
Kraft eines Moleküls der ersten Gattung, mit
 χ die Kraftfunction oder das Ergal desselben
bezeichnen (so dass $\chi + \ell$ constant ist, so lange
nur die inneren Kräfte des Moleküls wirksam
sind.)

Ferner seien

$$q_1 q_2 q_3 \dots q_r$$

die den Coordinaten $p_1 p_2 \dots p_r$ entsprechen-
den Momente (d. h. wir denken uns ℓ durch
die Coordinaten $p_1 p_2 \dots p_r$ und durch deren
Differentialquotienten nach der Zeit

$$\dot{p}_1 \dot{p}_2 \dot{p}_3 \dots \dot{p}_r$$

ausgedrückt, und bezeichnen die Grössen

$$c_1 \frac{\ell}{dp_1}, c_2 \frac{\ell}{dp_2},$$

mit $q_1, q_2 \dots$ wobei $c_1 c_2 \dots$ beliebige Constan-
ten sind.

Ich will an dieser Stelle bemerken, dass
in meiner Abhandlung " Bemerkungen über
einige Probleme der mechanischen Wärmethe-
orie ", III. Abschnitt, die mit dem Index
 p_i bezeichneten Grössen dieselbe Bedeutung
haben, wie hier die mit q bezeichneten,
während sie dort als Differentialquotienten der
Coordinaten bezeichnet werden, welcher Ir-
rthum übrigens kaum ein Missverständniss ver-
anlasst haben dürfte.

Die analogen Grössen für die Moleküle der
übrigen Gattungen bezeichnen wir mit den
entsprechenden Accenten.

Gemäss den Rechnungen von Maxwell,
Watson und mir ist dann im Zustande
des Wärmegleichgewichtes die Zahl der
Moleküle, für welche die Grössen $p_4, p_5, \dots,$
 $q_1, q_2 q_3 \dots q_r$, zwischen den Grenzen

$$p_4 \text{ and } p_4 + dp_4, p_5 \text{ and } p_5 + dp_5 \text{ etc. till } q_r \text{ and } q_r + dq_r \quad (43)$$

liegen, durch den Ausdruck

$$C e^{-h(\chi + \ell)} dp_4 dp_5 \dots dq_r \quad (44)$$

gegeben ist, in welchem C und h Constanten,
also von den Grössen p und q unabhängig sind.

Analoge Ausdrücke gelten natürlich für die
übrigen Molekül-gattungen, u. s. w. hat h ,
nicht aber C für alle denselben Werth.

in the whole there are $\nu + 1$ different molecule
kinds, the generalised coordinates of the last
kind being :

$$p_1^{(\nu)}, p_2^{(\nu)}, p_3^{(\nu)}, \dots, p_{r^{(\nu)}}^{(\nu)},$$

The three first coordinates should be always
the cartesian coordinates of the barycenter.

Naturally now it is necessary to the accept
that as many molecules from each individual
kind are available.

We want then to define with ℓ the total alive
force of a molecule of the first kind, with χ
the force function or the Ergal (?) of the same
(so that $\chi + \ell$ is constant, as long as only the
internal forces of the molecule take effect.)

Furthermore let

$$q_1 q_2 q_3 \dots q_r$$

be appropriate moments of the coordinates
 $p_1 p_2 \dots p_r$ (i.e. we imagine ℓ expressed by the
coordinates $p_1 p_2 \dots p_r$ and by their derivatives
with respect to time

$$\dot{p}_1 \dot{p}_2 \dot{p}_3 \dots \dot{p}_r,$$

and name $q_1 q_2 \dots$ the quantities

$$c_1 \frac{\ell}{dp_1}, c_2 \frac{\ell}{dp_2},$$

where $c_1 c_2 \dots$ are any constants.

I want to notice here that in my paper " re-
marks over some problems of the mechani-
cal heat theory ' ', III. paragraph, where I
have defined the quantities having this mean-
ing with the index p_i , but here they are named
 q , while they are called derivatives of the coor-
dinates there, which mistake might by the way
hardly have produced misunderstandings.

We mark the similar quantities for the
molecules of the remaining kinds with the ap-
propriate exponent (accent).

In accordance with the calculations of
Maxwell, Watson and me, then at heat equi-
librium state, the number of molecules, for
which the quantities are between the bound-
aries

are given by the expression

in which C and h constants, which are thus
independent of the quantities p and q .

Similar expressions apply naturally to the re-
maining molecule kinds, etc. however C and
 h , have not the same value for all.

Genau den Ausdruck (44) erhält man auch durch Betrachtungen, welche den im I. und II. Abschnitte angestellten vollkommen analog sind. Betrachten wir alle jene Moleküle irgend einer, z.B. der ersten Gattung, für welche die Variablen p_4, p_5, \dots, q_r zu irgend einer Zeit, z. B. zur Zeit 0 zwischen den Grenzen (43) lagen, nach Verlauf einer bestimmten Zeit t sollen die Werthe der selben Variablen zwischen den Grenzen

$$P_4 \text{ and } P_4 + dP_4, P_5 \text{ and } P_5 + dP_5 \text{ etc. till } Q_r \text{ and } Q_r + dQ_r \quad (45)$$

liegen.

Es gilt dann nach dem bereits citirten allgemeinen Satze folgende Gleichung

$$dp_4 dp_5 \dots dq_r = dP_4 dP_5 \dots dQ_r \quad (44?) \quad (46)$$

Denn es ist selbstverständlich

One gets exactly the expression (44) also by considering, those used in Ith and IIth paragraphs which are perfectly similar. We consider all those molecules of one kind, e.g. the first kind, for which the variables p_4, p_5, \dots, q_r , lay between the boundaries (43) at a given time, e.g. time 0, and after a certain time t the values of those variables are situated between the boundaries

It applies then after the general result already mentioned the following equation

Because it is natural that

$$dp_1 dp_2 dp_3 = dP_1 dP_2 dP_3$$

Es sind also die Variablen p_4, p_5, \dots, q_r in der That so beschaffen, dass das Product ihrer Differentiale bei constantem Zeitintervalle seinen Werth nicht verändert.

Wir müssen also jetzt $\nu + 1$ Urnen fingiren; in der ersten derselben befinden sich Zettel, auf welchen alle möglichen Werthe der variablen p_4, p_5, \dots, q_r aufgeschrieben sind, und zwar soll die Zahl derjenigen Zettel, welche mit Werthen versehen sind, die zwischen den Grenzen (43) eingeschlossen sind, sobald sie durch das product $dp_4 dp_5 \dots dq_r$ dividirt wird, eine Constante liefern.

Ebenso sollen auf den Zetteln der zweiten Urne die verschiedenen Werthe der Variablen p'_4, p'_5, \dots, q'_r aufgeschrieben sein, wobei jedoch die letzterwähnte Constante einen andern Werth haben kann.

Dasselbe gilt für die übrigen Urnen.

Wir ziehen nun aus den ersten Urne für jedes Molekül der ersten Gattung einen Zettel, ebenso aus der zweiten Urne für jedes Molekül der zweiten Gasart u. s. w.

Den den Zustand jedes Moleküls bestimmende Variablen denken wir uns nun diejenigen Werthe ertheilt, welche auf dem für das betreffende Moleküle gezogenen Zettel aufgeschrieben sind.

Thus, indeed, the variable p_4, p_5, \dots, q_r are so constituted that the product of their differentials does not change its value in constant time intervals.

We must thus now imagine $\nu + 1$ urns; in the first are tickets, on which are noted all possible values of the variable p_4, p_5, \dots, q_r , the number of tickets, on which a value is noted, is given by the number of those molecules which are enclosed between the boundaries (43), after they have been divided by the product $dp_4 dp_5 \dots dq_r$.

Likewise the different values of the variables, p'_5 , should be noted p'_4, \dots, q'_r on the tickets of the second urn, where however the last-mentioned constant can have another value.

The same applies to the remaining urns.

Now we pull a ticket from the first urn for each molecule the first kind, likewise from the second urn for each molecule of the second type of gas etc.

We imagine now that the variable determining the status of each molecule take those values which are noted on the tickets pulled for the molecules concerned.

Es wird dann natürlich ganz vom Zufalle abhängen, welches Zustandsvertheilungsgesetz unter den Gasmoleküle auf diese Weise durch das Los bestimmt werden wird, und wir müssen zuvoerderst alle diejenigen Zustandsvertheilungen, bei welchen die gesammte lebendige Kraft aller Moleküle einen andern als den vorgeschriebenen Wert besitzt, verworfen.

Es wird dann am wahrscheinlichsten sein, dass gerade die durch die Formel (44) bestimmte, also die dem Wärmegleichgewichte entsprechende Zustandsvertheilung ausgelost wird.

Der Beweis hierfür bietet keine Schwierigkeit.

Es kann also der in den beiden ersten Abschnitten gefundenen Satz ohne weiteres auf diesen Fall verallgemeinert werden.

Wir wollen die Verallgemeinerung des Problems noch um eines Schritt weiter treiben, indem wir annehmen, das Gas werde von Molekülen gebildet, welche genau dieselbe Beschaffenheit wie in dem eben betrachteten Falle haben.

Es sein aber sogenannte äussere Kräfte tätig, d. h. solche, welche wie die Schwerkraft von ausserhalb des Gases liegenden Ursachen herühren.

über die nähere Beschaffenheit und Darstellungsweise solcher äusserer Kräfte vergleiche man meine Abhandlung "über das Wärmegleichgewicht von Gasen, auf welche äussere Kräfte wirken" .

Es wird auch die Lösung des Problems der Wesenheit nach jetzt dieselbe wie früher bleiben.

Nur wird jetzt die Zustandsvertheilung nicht mehr an allen Stellen des mit Gasmolekülen gefüllten Gefässes dieselbe sein, daher wird jetzt auch nicht mehr $dp_1.dp_2.dp_3 = dP_1.dP_2.dP_3$ sein.

Wir wollen daher jetzt unter den generalisirten Coordinaten $= p_1p_2 \dots p_r$ ganz allgemein beliebige Variable verstehen, welche hinreichend sind, um die absolute Lage eines Moleküls im Raume, und die relative Lage seiner Bestandtheile zu bestimmen.

Die Bedingung, dass $p_1p_2p_3$ gerade die rechtwinkligen Coordinaten des Schwerpunktes seien, wird also jetzt ganz fallen gelassen.

Dasselbe gilt natürlich auch für die Moleküle aller andern Gasarten.

Es ist aber jetzt noch eines zu bemerken.

Naturally it depends completely on chance, which will be determined by the state distribution law among gasmolecules, and we must reject at first all those state distributions, for which the total alive force of all molecules is different from the prescribed value, .

It will be then most probable that thus the appropriate status distribution corresponding to heat equilibrium determined by the formula (44), will be is chosen very often.

The proof for this does not offer difficulty.

Thus the record found in the two first paragraphs can be generalized easily in this case.

We want to drive the generalization of the problem still over a step further, by assuming, that the gas formed by molecules, has exactly the same condition as in the case considered previously.

The outside forces called active, are those which causes are situated outside of the gas like the force of gravity.

Over the closer condition and representation method of such outside forces one can read my paper " over the heat equilibrium of gases, which outside forces affect " .

Also the solution of the problem will remain in nature the same as in previous times.

Now the status distribution will not be any more the same in all places of the container filled with gasmolecules , therefore now will also not be any more $dp_1.dp_2.dp_3 = dP_1.dP_2.dP_3$.

Therefore we want to mean by the generalized coordinates $= p_1p_2 \dots p_r$ any variable which are sufficient to determine completely, the absolute position of a molecule in the space, and the relative position of its constituents.

The condition that $p_1p_2p_3$ are the cartesian coordinates of the barycenter is not used anymore.

The same applies naturally also to the molecules of all other gas kinds.

Now still a point is to be noticed however .

Während früher bloß die Bedingung notwendig war, daß im ganzen Gefäße sehr viele Moleküle von jeder Gattung vorhanden sein, so ist jetzt erforderlich, daß selbst in einem kleinen Raumelemente, innerhalb dessen die äusseren Kräfte weder in Grösse noch Richtung erheblich variiren, schon ausserordentlich viel Moleküle vorhanden sein müssen, (eine Voraussetzung, die übrigens bei jedem gas-theoretischen Probleme gemacht wird, sobald äussere Kräfte mit ins Spiel kommen).

Denn unsere Methode des Auslosens setzt immer voraus, daß die Zustände sehr vieler Moleküle als unter einander ganz gleich betrachtet werden können in dem Sinne, daß die Zustandsverteilung nicht verändert wird, wenn diese Moleküle ihre Zustände unter einander vertauschen.

Die Wahrscheinlichkeit der Zustandsverteilung ist dann durch die Anzahl der Complexionen bestimmt, aus denen die betreffende Zustandsverteilung hervorgeht.

Seien wieder genau wie im eben betrachteten Falle $\nu + 1$ Molekül-gattungen vorhanden, wesshalb auch $\nu + 1$ Urnen fingiert werden müssen

Wir nehmen jetzt wieder zuerst an, es sei eine Complexion gezogen worden, bei welcher genau für

$$w_{000\dots} = f(0, 0, 0, \dots)\alpha\beta\gamma\dots$$

Moleküle die Variablen $p_1 p_2 \dots q_r$ zwischen den Grenzen 0 und α , 0 und β , 0 und γ u. s. w. liegen;

ferner genau für

$$w_{10000\dots} = f(\alpha, 0, 0, \dots)\alpha\beta\gamma\dots$$

dieselben Variablen zwischen den Grenzen α und 2α , 0 und β , 0 und γ u. s. w. liegen, allgemein ausgedrückt, bei welcher genau für

$$w_{abc\dots} = f(a\alpha, b\beta, c\gamma, \dots k\kappa)\alpha\beta\gamma\dots\kappa \quad (47)$$

Moleküle die Variablen $p_1 p_2 \dots q_r$ zwischen den Grenzen

$$a\alpha \quad \text{and} \quad (a+1)\alpha, b\beta \quad \text{and} \quad (b+1)\beta, \dots k\kappa \quad \text{and} \quad (k+1)\kappa \quad (48)$$

liegen.

While earlier the only necessary condition was, that in whole containers as many molecules of each kind are available, then is now necessary that even in small space elements, within whose the outside forces do not vary substantially neither in size nor direction, there must be already extraordinarily many molecules, (a prerequisite, which is by the way made in all gas-theoretical problems, as soon as outside forces come also into the play).

Because our method of resolution always presupposes that the states of very many molecules can be quite directly considered in the sense that the state distribution is not changed, if these molecules exchange their states among each other.

The probability of the state distribution is then given by the number of complexions, from which arises the concerned state distribution.

Again exactly as in the even case considered above $\nu + 1$ molecule kinds are available, we imagine to have also $\nu + 1$ urns.

We assume now again first, that a complexion is pulled, with exactly

Diese Grenzen sollen so nahe sein, dass wir alle dazwischen liegende Werthe identificieren können, das wir also die Sache so betrachten könne, als ob die Variable p_1 nur im Stande wäre, die Werthe $0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha$ u. s. w. , p_2 nur die Werthe $0, \beta, 2\beta, 3\beta$ u. s. w. anzunehmen. Sei n die Gesamtzahl der Moleküle der ersten Gasart, und bezeichnen wir wieder die auf die übrigen Gasarten Bezug habenden Grössen mit entsprechenden Accenten, so ist

$$B = \frac{n!n'n''!\dots n^{(\nu)}!}{\prod w_{abc\dots k}! \prod w_{a'b'\dots k'}! \prod w_{a''b''\dots k''}!\dots \prod w_{a^{(\nu)}b^{(\nu)}\dots k^{(\nu)}}!} \quad (49)$$

die mögliche Anzahl von Permutationen der Elemente dieser Complexion, also die Grösse, welche wir der Permutabilität genannt haben.

Die Producte sind so zu verstehen, dass die Zahl $a, b, \dots, a', b' \dots$, u. s. w. alle überhaupt möglichen Werte zu durchlaufen haben, also z. B. wenn man es mit rechtwinkligen Coordinaten zu thun hat, alle möglichen Werte von $-\infty$ bis $+\infty$, wenn man es mit Winkelcoordinaten zu thun hat, alle Werte von 0 bis 2π und ähnliches.

Betrachten wir zürst den Fall, wo wirklich p_1 nur die Werte $0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha \dots$ anzunehmen im Stande ist, und ebenso die übrigen Variablen, so gibt also der Ausdruck (49) die Anzahl der Complexionen, welche zu einer und derselben Zustandsvertheilung führen;

diese Anzahl ist aber gemäss der oben gemachten Annahmen da Mass der Wahrscheinlichkeit dieser Zustandsvertheilug.

Die Grössen w und n sind sämmtlich sehr gross; wir können daher wieder $w!$ mit $\sqrt{2\pi} \left(\frac{w}{e}\right)^w$ vertauschen.

Bezeichnen wir ferner die Summe

$$n!n + n'!n' + \dots n^{(\nu)}!n^{(\nu)}$$

mit N , so können wir auch $n!$ mit $\sqrt{2\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ vertauschen, und erhalten dann, indem wie sogleich zum Logarithmus übergehen

$$\ell B = N C \ell 2\pi - \left[\sum w_{ab\dots} \ell w_{ab\dots} + \sum w'_{a'b'\dots} \ell w'_{a'b'\dots} + \dots \right] \quad (50)$$

Die Summen sind in dem gleichen Sinne zu verstehen, wie oben die Producte.

$2C$ ist die um $\nu + 1$ verminderte Anzahl der im Nenner der Formel (49) stehenden Factoriellen.

Wir wollen nun in Formel (50) für die Grössen w , deren Werthe aus der Gleichung (47) einführen, und dann zur Limite für immer mehr verschwindende $\alpha, \beta, \gamma \dots$ übergehen.

These boundaries should be so close that we can identify all values which are situated between them, which we thus can regard the thing so, as if the variable p_1 would be only in the state corresponding to the values $0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha$ etc. , p_2 to $0, \beta, 2\beta, 3\beta$ etc. n is the total amount of the molecules of the first type of gas, and we define again for the remaining types of gas, quantities with appropriate exponent (Accent ?), so that

is the possible number of permutations of the items of these complexions, thus the quantity which we called the permutability.

The products are to be understood so that the numbers $a, b, \dots, a', b' \dots$, etc. have to take all possible values, thus e.g. if one represents it with cartesian coordinates, all possible values of $-\infty$ to $+\infty$, if one represents it with angular coordinates, all values from 0 to 2π and the like.

If we consider first the case, where p_1 is assumed to take only the values $0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha \dots$, and likewise the remaining variables, then thus the expression (49) gives the number of complexions, which lead the same state distribution ;

this number is however in accordance with the assumption made above concerning the measure of the probability of these state distributions

The quantities w and n are simultaneously very large; we can exchange therefore $w!$ again with $\sqrt{2\pi} \left(\frac{w}{e}\right)^w$.

We furthermore name the sum

as N , then we can replace $n!$ also by $\sqrt{2\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n$, and get then, by turning immediately to the logarithm

The sums are to be understood in the same sense, as above the products.

$2C$ is the number of factorials decreased by $\nu + 1$ in the denominator of the formula (49).

We want now to replace in formula (50) the quantities w , by their values from the equation (47), and then to ignore the ever more infinitesimal limit $\alpha, \beta, \gamma \dots$

Wenn wir wieder die Grösse, welche wir so nach Weglassung überflüssiger Constanten erhalten, mit Ω bezeichnen und das Permutabilitätsmass nennen, so erhalten wir:

$$\Omega = - \left[\int \int \dots f(p_1, p_2 \dots q_r) \ell f(p_1, p_2 \dots q_r) dp_1 dp_2 \dots dq_r + \int \int \dots f(p'_1, p'_2 \dots q'_{r'}) \ell f(p'_1, p'_2 \dots q'_{r'}) dp'_1 dp'_2 \dots dq'_{r'} + \dots \right] \quad (51)$$

Die Integration ist hier überall über alle möglichen Werte der Variablen zu erstrecken.

Von dem Ausdrücke in der eckigen Klammer habe ich schon in meiner Abhandlung ' ' über das Wärmegleichgewicht von Gasmolekülen, auf welche äussere Kräfte wirken ' ' nachgewiesen, dass durch sein Minimum der Zustand des Wärmegleichgewichtes unter den Gasmolekülen bestimmt ist. Natürlich kommt noch als Bedingungsgleichung die Gleichung der lebendigen Kraft hinzu.

If we compute again the quantity which we name ω after omission of the unnecessary constants, that we call the permutability mass, then we obtain:

The integration is to be extended here everywhere over all possible values of the variables.

I have already proven in my paper "over the heat equilibrium of gas molecules, which outside forces affects" that the status of the heat equilibrium under the gas molecules is certainly obtained by the minimum of the expression in the square brackets .

Naturally the equation of the alive force is still added as equation of conditions.

4 IV. über die Bedingungen des Maximums des vom Potenzexponenten freien Productes aller Werte der die Zustandsverteilung bestimmende Function.

IV. On the conditions of the maximum of all values of the power exponent free products of the Function determining the status distribution (???)..).

Ehe ich auf die Behandlung des zweiten Hauptsatzes eingehe, will ich noch in gedrängter Kürze ein Problem behandeln dessen Bedeutung ich bereits im ersten Abschnitte bei der Besprechung der Arbeiten Herrn Oskar Emil Meyer's über diesen Gegenstand genügend klar dargestellt zu haben glaube, nämlich das Problem der Aufsuchung des Maximums des Productes der Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Zustände.

Ich will jedoch dieses Problem nur für Gase mit einatomigen Molekülen behandeln, und auch da nur für den Fall, dass ausser der Gleichung für die lebendige Kraft keine anderen Nebenbedingungen bestehen.

Betrachten wir zürst den einfachsten Fall, dass nur eine discrete Anzahl vor lebendigen Kräften möglich ist, etwa $0, \varepsilon, 2\varepsilon, \dots, p\varepsilon$ und führen wir bei Behandlung dieses Problemszunächst wieder nicht die Geschwindigkeitscomponenten, sondern die lebendigen Kräfte als Variable ein.

Before I deal with the handling of the second main theorem, I want to treat still in pushed shortness a problem whose meaning I believe I have already explained sufficient clearly in the first paragraph with the discussion of the work of Mr. Oskar Emil Meyer's on this subject , i.e. the problem of looking up the maximum of the products of the probabilities of all possible statuses.

I want however to treat this problem only for gases with monatomic molecules, and also there is no other secondary conditions if we except the equation for the alive force .

We regard first the simplest case where only a discrete number of alive forces is possible, say $0, \varepsilon, 2\varepsilon, \dots, p\varepsilon$ and we introduce for handling this problem not the velocity components, but the alive forces as variable.

Wir wollen wieder mit $w_0, w_1, w_2, \dots, w_p$ die Anzahl der Moleküle bezeichnen, welche die lebendige Kraft $0, \varepsilon, 2\varepsilon, \dots, p\varepsilon$ besitzen.

Wenn wir dann die Aufgabe in demselben Sinne auffassen, wie dies bisher immer geschah, so sind die Bedingungen derselben folgende :

Es muss die Grösse

We want also to define again $w_0, w_1, w_2, \dots, w_p$ the number of molecules, which possess the alive force $0, \varepsilon, 2\varepsilon, \dots, p\varepsilon$.

If we understand then the function in the same sense, as this so far always occurred, then the same conditions are the following:

the quantity

$$B = w_0 \cdot w_1 \cdot w_2 \dots w_p$$

oder, wenn man lieber will, die Grösse

or, if one wants rather, the quantity

$$\ell B = \ell w_0 + \ell w_1 + \ell w_2 + \dots + \ell w_p \tag{52}$$

ein Maximum werden, während gleichzeitig die Nebenbedingungen bestehen

must become a maximum, while exist at the same time the secondary conditions

$$n = w_0 + w_1 + w_2 \dots + w_p \tag{53}$$

und

and

$$L = (w_1 + 2w_2 + 3w_3 \dots + Pw_p)\varepsilon \tag{54}$$

Addieren wir zum Ausdruck (52) die rechten Seiten der Gleichung (53) und (54), letztere mit den constanten Factoren h und k multipliciert, so können wir die partiellen Differentialquotienten der so erhaltenen Summe nach jeder der Grössen $w_0, w_1, w_2 \dots$ gleich Null setzen, und erhalten in dieser Weise die Gleichungen

If we add the right sides of the equations (53) and (54) to the expression (52), the latters multiplied by the constant factors h and k , then we can set to zero the partial derivatives of the sum with respect to the variables $w_0, w_1, w_2 \dots$, and get in this way the equations

$$\frac{1}{w_0} + h = 0, \frac{1}{w_1} + h + k = 0, \frac{1}{w_2} + h + 2k = 0 \text{ etc.}$$

woraus durch Elimination der Constanten h und k hervorgeht

from which by elimination of the constants h and k comes out

$$\frac{1}{w_1} - \frac{1}{w_0} = \frac{1}{w_2} - \frac{1}{w_1} = \frac{1}{w_3} - \frac{1}{w_2} = \dots$$

oder

or

$$\frac{1}{w_0} = a, \frac{1}{w_1} = a + b, \frac{1}{w_2} = a + 2b, \dots, \frac{1}{w_p} = a + pb, \tag{55}$$

Setzt man diese Werte in die Gleichung (53) und (54) ein, so erhält man zur Bestimmung der beiden Constanten a und b die beiden Gleichungen

If one inserts these values into the equation (53) and (54), then one gets for the determination of the two constanta a and b the two equations

$$n = \frac{1}{a} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} + \dots + \frac{1}{a+pb}$$

$$L = \frac{\varepsilon}{a+b} + \frac{2\varepsilon}{a+2b} + \frac{3\varepsilon}{a+3b} + \dots + \frac{p\varepsilon}{a+pb},$$

Die directe Bestimmung der beiden Unbekannten a und b aus diesen Gleichungen wäre äusserst weitschweifig.

Etwas schneller würde man wohl in jedem speciellen Falle nach der Regula falsi zum Ziele gelangen, doch habe ich mich auch der Mühe einer derartigen Rechnung nicht unterzogen, sondern will hier nur eine allgemeine Discussion liefern, wie die zu erwartenden Lösungen beiläufig beschaffen sein müssen, wobei jedoch wieder im Auge behalten werden muss, dass die letztentwickelten Gleichungen nur eine angenäherte Lösung des Problems liefern können, da dieses selbst keine Brüche, sondern nur einen Lösung in ganzen positiven Zahlen zulässt.

Zunächst fällt da auf, dass das Problem aufhört einen Sinn zu haben, sobald das Product $p \cdot \frac{p+1}{2}$ grösser als $\frac{L}{\epsilon}$ ist.

Demn dann folgt aus den Bedingungsgleichungen notwendig, dass eines der w , also auch das Product B den Wert von Null haben muss.

Es kann also von einem Maximum der Grösse B überhaupt keine Rede sein.

Damit also das Problem überhaupt einen Sinn behalte, dürfen zu grosse lebendige Kräfte niemals möglich sein.

Ist $p \cdot \frac{p+1}{2} = \frac{L}{\epsilon}$, so müssen alle w bis auf w_0 den Wert 1 besitzen, damit B von Null verschieden sein kann.

Eine grössere Mannigfaltigkeit kann natürlich erst eintreten, wenn für p noch kleinere Werte gewählt werden.

Dann werden, sobald n ziemlich gross ist, die obigen Gleichungen, wenigstens angenähert, verwendbar sein.

Es wird zunächst a noch immer bedeutend kleiner als b sein, w_0 wird also einen sehr grossen, w_1 einen viel kleineren Wert haben.

Der Werth von w_2 wird in der Nähe von $\frac{w_1}{2}$, der von w_3 in der Nachbarschaft von $\frac{2w_2}{3}$ u. s. w. liegen .

überhaupt wird die Abnahme der Grösse w bei wachsendem Index eine ziemlich unbedeutende sein, ungleich unbedeutender als früher, wo statt des Maximums von $w_0 \cdot w_1 \cdot w_2 \dots$ das maximum $w_0^{w_0} \cdot w_1^{w_1} \cdot w_2^{w_2} \dots$ gesucht wurde.

Werden jetzt dem p noch viel kleiner Werte erteilt, so wird der Wert von a nicht mehr kleiner als b sein, dann wird auch w_0 nicht mehr auffallend grösser als die übrigen w sein;

The directe determination of the two unknown quantities a and b from these equations would be extremely fastidious.

One probably arrive somewhat faster to the target in each special case following the Regula falsi , but I did not undergo the trouble of such a calculation, but here I want to supply only a general discussion, how the solutions which can be expected must be casually constituted, where however we keep again in mind that the last-developed equations can supply only an approximate solution of the problem, but we allow only solution in positive numbers, even no fractions

First it is noticeable there that the problem stops to have a sense, as soon as the product $p \cdot \frac{p+1}{2}$ is larger than $\frac{L}{\epsilon}$.

Because then it necessarily follows from the conditions equations that then one of the w thus also the product B have the value zero.

It can't be thus no mention at all of a maximum of the quantity B .

So that thus the problem keeps a sense at all, excessive alive forces may never be possible.

If $p \cdot \frac{p+1}{2} = \frac{L}{\epsilon}$, then all w up to w_0 must take the value 1, so that B can be different from zero.

A larger diversity can occur naturally only if still smaller values are selected for p .

Then, as soon as n is rather large, the above equations, can be used at least approximately.

first a will be still significantly smaller than b , w_0 will thus have a very large value , w_1 a much smaller value .

The value of w_2 becomes situated in the proximity of $\frac{w_1}{2}$, that of w_3 in the neighbourhood of $\frac{2w_2}{3}$ etc.

at all the reduction of the quantity w with increasing index will be quite insignificant, much insignificant than in previous development, where instead of the maximum of $w_0 \cdot w_1 \cdot w_2 \dots$ the maximum of $w_0^{w_0} \cdot w_1^{w_1} \cdot w_2^{w_2} \dots$ was looked up.

If the p are given now many small values, then the value of a will be no longer smaller than b , then w_0 will not be remarkably larger than the remaining w ;

es wird dann w_2 entschieden grösser als $\frac{w_1}{2}$, ebenso w_3 grösser als $\frac{2}{3}w_2$ u. s. w. sein. Die Abnahme von w bei wachsendem Index ist eine noch geringere. Bei noch weite abnehmendem p prävalirt dann die Grösse a , und w nehmen wenigstens für kleinere Indices fast gar nicht mehr ab.

Endlich wird b negativ, und der Wert der Grössen w nimmt bei wachsendem Index sogar zu.

Beispiele hierfür liefern folgende Fälle, denen jedesmal sogleich die ganz zahligen Werte der Grössen w beigefügt sind, für welche B ein Maximum wird.

- $n = 30, L = 30\varepsilon, p = 5, w_0 = 17, w_1 = 5, w_2 = 3, w_3 = 2, w_4 = 2, w_5 = 1$
- $n = 31, L = 26\varepsilon, p = 4, w_0 = 18, w_1 = 6, w_2 = 3, w_3 = 2, w_4 = 2$
- $n = 40, L = 40\varepsilon, p = 5, w_0 = 23, w_1 = 7, w_2 = 3, w_3 = 3, w_4 = 2, w_5 = 2$
- $n = 40, L = 40\varepsilon, p = 6, w_0 = 24, w_1 = 6, w_2 = 3, w_3 = 2, w_4 = 2, w_5 = 1, w_6 = 1$
- $n = 18, L = 45\varepsilon, p = 5, w_0 = 3, w_1 = 3, w_2 = 3, w_3 = 3, w_4 = 3, w_5 = 3$
- $n = 23, L = 86\varepsilon, p = 5, w_0 = 1, w_1 = 2, w_2 = 2, w_3 = 3, w_4 = 4, w_5 = 11$

Gehen wir jetzt zu dem Falle über, wo die Reihe der lebendigen Kräfte eine kontinuierliche ist, und führen zuerst wieder die lebendige Kraft x als massgebende Variable ein, so geht das Problem gemäss unserer Auffassung in folgendes über :

Es soll der Ausdruck

$$Q = \int_0^P \ell f(x) dx$$

ein Maximum werden, während gleichzeitig

$$n = \int_0^P f(x) dx \quad \text{and} \quad L = \int_0^P x f(x) dx$$

gegebenen Constanten sind.

P ist ebenfalls constant. Ich setze absichtlich die obere Grenze zuvörderst nicht gleich ∞ , sondern gleich P .

Man kann dann noch immer leicht zur Limite für immer mehr und mehr wachsende P übergehen.

Verfahren wir wieder nach den Regeln, so ergibt sich

$$\delta \int_0^P [\ell f(x) + h f(x) + k x f(x)] dx = \int_0^P \left[\frac{1}{f} + h + kx \right] dx \delta f = 0$$

woraus folgt:

$$f = -\frac{1}{h + kx} = \frac{1}{a + bx},$$

We take then w_2 clearly larger than $\frac{w_1}{2}$, just as w_3 larger than $\frac{2}{3}w_2$ etc. We suppose w is still smaller with increasing index. With still far decreasing p then the quantity a prevails and w does not decrease much at least for smaller indices.

Finally b becomes negative, and the value of the quantities w even increases with increasing index.

The following cases supply examples for this, each time the numerical values are immediately attached to the quantities w , for which B becomes a maximum

If now we turn into to the case, where the number of the alive forces is a continuity, and introduce first again the alive force x as determining variable, then the problem changes in accordance with our view into the following:

the expression

becomes a maximum, while simultaneously

are given constants.

P is likewise constant. At first I set intentionally the upper boundary not directly ∞ , but equal to P .

One can then still easily turn into the limite for always more and more increasing P .

If we proceed again according to the rules, then arises

from which follows:

wenn wir $h = -a; k = -b$ setzen.

if we set $h = -a; k = -b$.

Zur Bestimmung dieser beiden Constanten dienen die Gleichungen:

For the determination of these two constants, we use the equations :

$$n = \int_0^P f(x) dx = \frac{1}{b} \ell \frac{a + BP}{a}$$

$$L = \int_0^P x f(x) dx = \frac{P}{b} - \frac{a}{b^2} \ell \frac{a + BP}{a}$$

woraus, wenn man der Quotienten $\frac{a}{b}$ mit α bezeichnet, folgt:

from which, if one names the quotients $\frac{a}{b}$ α , it follows:

$$L + \alpha n = \frac{P}{b}, bn = \ell \left(1 + \frac{P}{\alpha} \right),$$

woraus folgt:

from which follows:

$$(L + \alpha n) \ell \left(1 + \frac{P}{\alpha} \right) = P \alpha \quad (56)$$

Aus dieser transcendenten Gleichung muss zuerst α bestimmt werden, woraus dann leicht a und b folgen.

In this transcendental equation, α must be determined first from which then easily a and b follow:

Da Pn die lebendige Kraft ist, welche dem ganzen Gase zukäme, wenn jedes Molekül sie grösste, überhaupt mögliche lebendige Kraft P hätte, so sieht man sofort, dass Pn unendlich gross gegenüber L sind muss.

Since Pn is the alive force, which would come to the whole gas, if each molecule had the largest of all possible alive force P , then one sees immediately, that Pn must be infinitely large with respect to L .

$\frac{L}{n}$ ist die mittlere lebendige Kraft eines Moleküls.

$\frac{L}{n}$ is the average alive force of a molecule.

Man überzeugt sich dann leicht, dass $\frac{P}{\alpha}$ nicht endlich sein kann, denn dann müsste $\frac{Pn}{\alpha n}$ endlich sein, und im Ausdrucke $L + \alpha n$ könnte L vernachlässigt werden.

One convinces oneself then easily that $\frac{P}{\alpha}$ can be not finite, because then $\frac{Pn}{\alpha n}$ would have to be finite, and in the expression $L + \alpha n$ L could be neglected.

Dann würde aber aus der Gleichung (56) alles bis auf $\frac{P}{\alpha}$ ausfallen, und nur verschwindend kleine Werte diese Grösse würden ihr genügen, was mit der ursprünglich gemachten Annahme im Widerspruch stünde.

Then however in the equation (56) everything up to $\frac{P}{\alpha}$ would drop, and only infinitesimal small values of this quantity would be sufficient for it, what would be in contradiction with the acceptance originally made.

Ebenso wenig kann $\frac{P}{\alpha}$ verschwindend klein sein, denn dann wäre wieder L verschwindend klein gegenüber αn ;

Just no more (?) can be infinitesimal small $\frac{P}{\alpha}$, because then again L would be infinitesimal small with respect to αn ;

ferner könnte $\ell \left(1 + \frac{P}{\alpha} \right)$ nach Potenzen von $\frac{P}{\alpha}$ entwickelt werden und die Gleichung (56) würde für $\frac{P}{\alpha}$ einen endlichen Wert liefern. Es bleibt also nur noch die Möglichkeit, dass $\frac{P}{\alpha}$ sehr gross ist.

furthermore $\ell \left(1 + \frac{P}{\alpha} \right)$ could be developed after the powers of $\frac{P}{\alpha}$ and the equation (56) for $\frac{P}{\alpha}$ would supply a finite value. Thus only the possibility remains that $\frac{P}{\alpha}$ is very large.

Da dann $\frac{\alpha n}{Pn} \ell \frac{\alpha n}{Pn}$ verschwindet, so liefert die Gleichung (56)

Since then $\frac{\alpha n}{Pn} \ell \frac{\alpha n}{Pn}$ disappears, then the equation (56) yields

$$\alpha = \frac{a}{b} = pe^{-\frac{nP}{L}}$$

woraus folgt

from which follows

$$b = \frac{P}{L}, a = \frac{P^2}{L} \cdot e^{-\frac{nP}{L}}$$

Aus diesen Gleichungen geht hervor, dass sich bei der in diesem Abschnitte behandelten Fassung des Problems für wachsende p, W, L die Wahrscheinlichkeit der Verschiedenheit der lebendigen Kräfte gar keiner, durch die mittlere lebendige Kraft eines Moleküls bestimm- baren Grenze nähert.

Wir wollen nun noch ein zweites Problem betrachten, welches der Wirklichkeit, so weit als möglich, angepasst ist.

Wir nehmen nämlich jetzt drei Geschwindigkeitscomponenten u, v, w parallel den drei Coordinatenrichtungen als massgebende Variable an, und suchen den Ausdruck

$$Q = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \ell f(u, v, w) du dv dw$$

zu einem Maximum zu machen, während gleichzeitig die beiden Ausdrücke

$$n = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v, w) du dv dw$$

und

$$L = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (u^2 + v^2 + w^2) f(u, v, w) du dv dw$$

gegebenen Constanten sind, führt man für u, v, w die Grösse der Geschwindigkeit

$$\omega = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$$

und zwei deren Richtung bestimmende Winkel θ und φ (Länge und Breite) ein, so erhält man bekanntlich:

$$du dv dw = \omega d\omega \sin \theta d\theta d\varphi$$

daher

$$Q = 4\pi \int_0^P \ell f(\rho) \rho^2 d\rho \tag{57}$$

$$n = 4\pi \int_0^P f(\rho) \rho^2 d\rho \tag{58}$$

$$L = 4\pi \int_0^P f(\rho) \rho^4 d\rho \tag{59}$$

Denn offenbar ist, wenn keine äusseren Kräfte thätig sind, $f(u, v, w)$ von der Richtung der Geschwindigkeit unabhängig.

From these equations it follows that in the version of the problem treated in this paragraph for increasing p, W, L the probability of the difference of the alive forces does not get closer to a boundary determinable from the average alive force of a molecule (???)..

We want to consider now still a second problem, which is adapted to the reality as far as possible.

We assume now three velocity components u, v, w parallel the three coordinates directions as determining variable, and we intend to the expression

while simultaneously the two expressions

and

are given constants, one takes for u, v, w the amplitude of the velocity

and its two direction determining angles θ and φ (length and width), then one gets as well known:

therefore

Because $f(u, v, w)$ is obviously independent of the direction of the velocity, if no outside forces are active.

Statt bis Unendlich haben wir absichtlich wieder bis zum endlichen Werte P integriert.

Bestimmen wir hier $f(\rho)$ gerade so, wie unmittelbar früher $f(x)$, so erhalten wir

$$f(\rho) = -\frac{1}{h + k\rho^2} = \frac{1}{a^2 + b^2\rho^2}$$

wobei wieder $-h = a^2$ und $-k = b^2$ gesetzt wurde.

Die beiden Constanten a und b sind aus den Gleichungen (58) und (59) zu bestimmen, welche nach Einsetzung des für $f(\rho)$ gefundenen Wertes lauten:

$$n = 4\pi \int_0^P \frac{\rho^2 d\rho}{a^2 + b^2\rho^2} = 4\pi \left(\frac{P}{b^2} - \frac{a}{b^3} \operatorname{arc\,tg} \frac{bP}{a} \right) \quad (60)$$

$$L = 4\pi \int_0^P \frac{\rho^4 d\rho}{a^2 + b^2\rho^2} = \frac{4\pi P^3}{3b^2} - \frac{a^2}{b^2} n$$

Aus der letzten Gleichung folgt:

$$\frac{4\pi}{b^2} = \frac{3}{P^3} \left(L + \frac{a^2}{b^2} n \right).$$

Dieser Wert, in die erste der Gleichungen (60) eingesetzt liefert:

$$n = 3 \left(\frac{L}{P^2} + \frac{a^2}{b^2 P^2} n \right) \left(1 - \frac{a}{Pb} \operatorname{arc\,tg} \frac{bP}{a} \right) \quad (60a)$$

Wenn dagegen b^2 einen negativen Wert hat, so wollen wir $-b^2$ statt b^2 schreiben, und erhalten :

$$\begin{aligned} f(\rho) &= \frac{1}{a^2 - b^2\rho^2} \\ n &= 4\pi \left(-\frac{P}{b^2} + \frac{a}{2b^3} \ell \frac{a + bP}{a - bP} \right) \\ L &= -\frac{4\pi P^3}{3b^2} + \frac{a^2}{b^2} n \\ n &= 3 \left(\frac{L}{P^2} - \frac{a^2}{b^2 P^2} \right) \left[1 - \frac{a}{2bP} \ell \left(\frac{a + bP}{a - bP} \right) \right] \end{aligned} \quad (60b)$$

Aus den Gleichungen (60a) und (60b) müsste zunächst der Quotient $\frac{a}{b}$ berechnet werden, und zwar würden dabei zunächst genau dieselben Schlüsse, mittelst welcher die Gleichung (56) discutirt wurde, Anwendung finden, um zu entscheiden, ob die Grösse $\frac{bP}{a}$, ausser welcher in Gleichung (50a) nur die jedenfalls unendlich kleine Grösse $\frac{L}{nP^2}$ vorkommt, unendlich klein, endlich, oder unendlich gross ist.

Ich will mich jedoch hierauf nichtweiter einlassen, und nur bemerken, dass man auch hier kein Resultat erhält, welches bei unendlichem Wachsen von n und P einer bestimmten, bloss von der mittleren lebendigen Kraft abhängigen Grenze zueilt.

We integrated intentionally again up to the finite value P instead of to infinity.

If we determine here $f(\rho)$ in such a way, as done directly previously for $f(x)$, then we get

whereby again were set $-h = a^2$ and $-k = b^2$.

The two constant a and b are to be determined from the equations (58) and (59), which become after replacing $f(\rho)$ by the found value:

From the last equation follows:

This value, set into the first of the equations (60) supplies:

If on the contrary b^2 has a negative value, then we want to write $-b^2$ instead of b^2 and we get

From equations (60a) and (60b) the quotient $\frac{a}{b}$ must be first calculated, and thereby we would get first exactly the same conclusions, which application of equation (56) would be discussed in order to decide whether the quantity $\frac{bP}{a}$, in equation (60a) is infinitely small, finite, or infinitely large whatever the infinitely small quantity $\frac{L}{nP^2}$ is, (???)

However I do not want to let myself discuss on that, and only note that one obtains also here no result, which when infinite growing of n and P and a certain, only dependent of the boundary to which the middle alive force hasten (???)

Auch auf die Fälle, wo ausser der Gleichung der lebendigen Kraft noch andere Bedingungen gegeben sind, will ich mich hier nicht näher einlassen, weil mich dies zu weit führen würde.

Um einen Beweis zu liefern, wie mannigfaltig der Begriff der wahrscheinlichsten Zustandsverteilung unter Gasmolekülen aufgefasst werden kann, will ich hier noch einer möglichen Definition derselben gedenken.

Nehmen wir wieder an, jedes Molekül sei nur fähig, eine discrete Reihe von lebendigen Kräften $0, \varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon \dots \infty$ anzunehmen.

Die Gesamtsumme der lebendigen Kraft aller Moleküle sei $L = \lambda\varepsilon$

Wir wollen jetzt die lebendige Kraft jedes einzelnen Moleküls in folgender Weise bestimmen: Wir haben, in einer Urne genau so viele (n) gleichbeschaffenen Kugeln, als Moleküle vorhanden sind.

Jedem Moleküle soll eine bestimmte Kugel entsprechen.

Wir machen nun λ Züge aus dieser Urne, wobei wir jedoch nach jedem Zuge die gezogene Kugel wieder in die Urne zurückwerfen.

Die lebendige Kraft des ersten Moleküls soll nun gleich der Producte der Grössen ε in die Zahl gemacht werden, welche angibt, wie oft die diesem Moleküle entsprechende Kugel aus der Urne gezogen worden ist.

Analog sollen die lebendigen Kräfte alle übrigen Moleküle bestimmt werden.

Wir haben so eine Verteilung der lebendigen Kraft L unter die Moleküle (eine Complexion) gewonnen.

Wir machen nun abermals λ Züge aus der Urne, und gewinnen dadurch eine zweite Complexion, dann eine dritte u. s. w. fort, bis wir in Ganzen sehr oftmal (J mal) aus der Urne λ Züge gemacht haben, wodurch wir J Complexionen gewonnen haben.

Wir können die wahrscheinlichste Zustandsvertheilung in zweifacher Weise definiren:

Erstens, wir zählen nach, wie oftmal in allen J Complexionen ein Molekül die lebendige Kraft 0 , ferner wie oft eines die lebendige Kraft $\varepsilon, 2\varepsilon$ u. s. w. hat, und kommen überein, dass die Verhältnisse dieser Zahlen für den Fall des Wärmegleichgewichtes die Wahrscheinlichkeiten liefern sollen, dass ein Molekül die lebendige Kraft $0, \varepsilon, 2\varepsilon$, u. s. w. hat.

Also, I do not want to discuss more of the cases, where still different equations of conditions are given to the alive force, because this would lead me too far.

In order to supply a proof, how diversely the term of the most probable status distribution among gasmolecules can be understood, I want to think of still another possible definition here.

We assume again, each molecule is only able to take a discrete set of alive forces $0, \varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon \dots \infty$.

The cumulative sum of the alive force of all molecules is $L = \lambda\varepsilon$.

We want now to determine the alive force of each individual molecule in the following way: We have, in an urn exactly as many (n) equivalent balls, as molecules are available.

Each molecules correspond to a given ball.

We make now λ pullings from this urn, whereby we however back-throw the pulled ball after each course again into the urn.

The alive force of the first molecule is to be made now equal the product of the quantities ε in the number, which indicates, how often the ball corresponding to this molecule was pulled from the urn.

Similarly the alive forces all remaining molecules are to be determined.

We have so won a distribution of the alive force among the molecules (a complexion).

Now again we make λ pullings from the urn, and win thereby a second complexion, then a third etc., until we made pullings in whole many times (J times) from the urn λ pullings, whereby we won J complexions.

We can define the most probable state distribution in a double way:

First of all, we recount, how often in all J complexions, a molecule has the alive force 0 , furthermore how often the alive force $\varepsilon, 2\varepsilon$ etc., and it appears that the ratios of these numbers are to supply the probabilities that a molecule has the alive force $0, \varepsilon, 2\varepsilon$, etc.. for the case of the heat equilibrium

Zweitens wir bilden die jeder Complexion entsprechende Zustandsverteilung. Sei irgend eine Zustandsverteilung so beschaffen, dass B Complexionen in dieselbe übergehen, so bezeichnen wir die Quotienten $\frac{B}{J}$ als die Wahrscheinlichkeit dieser Zustandsverteilung.

Es scheint diese Definition der Wahrscheinlichkeit einer Zustandsverteilung auf den ersten Blick sehr plausibel;

doch werden wir sogleich sehen, dass sie nicht angewendet werden darf, weil gemäss derselben nicht diejenige Zustandsverteilung, deren Wahrscheinlichkeit am grössten ist, dem Wärmegleichgewichte entsprechen würde.

Es ist leicht, die Hypothese, welche uns gegenwärtig beschäftigt, in Formeln zu fassen. Wir wollen da zuerst die erste Methode der Wahrscheinlichkeitsbestimmung discutiren.

Fassen wir das erste Molekül ins Auge, und nehmen wir an, es seien die ersten λ Züge gemacht worden, die Wahrscheinlichkeit, dass bei dem ersten Zuge die dem ersten Moleküle entsprechende Kugel gezogen worden sei, ist $\frac{1}{n}$;

die Wahrscheinlichkeit dagegen, dass eine andere Kugel gezogen worden sei, ist $\frac{n-1}{n}$.

Es ist also die Wahrscheinlichkeit, dass auf den $1^{ten}, 2^{ten}, 3^{ten} \dots, k^{ten}$ Zug die dem ersten Moleküle entsprechende Kugel gezogen worden sei, auf jeden folgenden aber eine andere, durch den Ausdruck

$$\left(\frac{1}{n}\right)^k \left(\frac{n-1}{n}\right)^{\lambda-k} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^\lambda \cdot \left(\frac{1}{n-1}\right)^k.$$

gegeben. Ebenso gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die dem ersten Moleküle entsprechende Kugel auf den $1^{ten}, 2^{ten}, 3^{ten} \dots, k-1^{ten}$ Zug, und dann noch auf den $k+1^{ten}$ gezogen worden sei u. s. w.

Die Wahrscheinlichkeit, dass also überhaupt die dem ersten Moleküle entsprechende Kugel auf beliebige k Züge gezogen worden sei, und auf die übrigen nicht, ist

$$w_k = \frac{\lambda!}{(k-\lambda)!k!} \left(\frac{n-1}{n}\right)^\lambda \left(\frac{1}{n-1}\right)^k$$

Genau ebenso gross ist aber diese Wahrscheinlichkeit auch für jedes andere Molekül.

Es ist dies also ganz allgemein die Wahrscheinlichkeit, dass einem Moleküle die lebendige Kraft $k\varepsilon$ zukomme.

Gebraucht man wieder für die Factorielle die Annäherungsformel, so ergibt sich

Secondly we form the appropriate status distribution of each complexion. Possibly if a status distribution is so constituted that B complexions change into the same, then we call the quotients $\frac{B}{J}$ the probability of this status distribution.

This definition of the probability of a status distribution seems at first sight very plausible;

but we will immediately see the fact that it may not be applied, because in according to it, it is not that state distribution, whose probability is largest, that would correspond to heat equilibrium.

It is easy, to seize in formulas the hypothesis, which employs us at present. We want to discuss first the first method of the probability regulation.

We consider the first molecule, and we assume that when the first λ pullings were made, the probability that in the first pulling was pulled the ball corresponding to the first molecule, is $\frac{1}{n}$;

On the contrary, the probability that another ball was pulled, is $\frac{n-1}{n}$.

Thus the probability that on the $1^{st}, 2^{nd}, 3^{rd} \dots, k^{th}$ pulling was pulled the ball corresponding to the first molecule, followed however by a different one, is given by the expression

The probability is just as large that the ball corresponding to the first molecules was pulled on the $1^{st}, 2^{nd}, 3^{rd} \dots$, to $k-1^{th}$ pulling, and then still on the $k+1^{th}$ etc.

The probability that thus the ball corresponding to first molecule was pulled on any k pullings, and not on the remainings, is

however this probability is just as exactly large also for every other molecule.

It is thus quite generally the probability that a molecule has the alive force $k\varepsilon$.

If one uses again for the factorial the approximation formula, then results

$$w_k = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \left(\frac{n-1}{n}\right)^\lambda \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{k}{\lambda} \cdot k}} \cdot \left[\frac{\lambda - k}{(n-1)k}\right]^k \cdot (\lambda - k)^{-\lambda}$$

woraus hervorgeht, dass die Wahrscheinlichkeit der grösseren lebendigen Kräfte eine so unverhältnismässig bedeutende ist, dass der ganze Ausdruck sich mit wachsendem k , λ , $\frac{1}{\epsilon}$ und n sich keiner eindeutig bestimmbarren Grenze nähert.

Wir wollen nun zur zweiten möglichen Definition der wahrscheinlichsten Zustandsvertheilung übergehen.

Wir müssen da sämtliche J Complexionen ins Auge fassen, welche wir uns dadurch gebildet haben dass wir J mal aus unserer Urne λ Kugeln gezogen haben.

Eine der verschiedenen möglichen Complexionen wird darin bestehen, dass die dem ersten Molekül entsprechende Kugel bei sämtlichen λ Zügen gezogen worden ist.

Wir wollen diesen Complexion symbolisch durch $m_1^\lambda m_2^0 m_3^0 \dots m_n^0$ ausdrücken.

Eine zweite Complexion, wobei auf $\lambda - 1$ Züge die dem ersten Moleküle entsprechende Kugel, auf einen Zug die dem zweiten entsprechende Kugel gezogen wurde, wollen wir mit

$$m_1^{\lambda-1} m_2^1 m_3^0 \dots m_n^0$$

ausdrücken. Wir sehen, dass die verschiedenen möglichen Complexionen genau durch die verschiedenen Glieder ausgedrückt werden, als deren Summe die nach dem polynomischen Satze entwickelte Potenz

$$(m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n)^\lambda \tag{A}$$

und zwar ist die Wahrscheinlichkeit jeder dertartigen Complexion genau proportional der Zahl, welche angibt, wie viele Glieder sich in das betreffende Glied der Potenz verwandeln, wenn man zürst das Product

$$(m'_1 + m'_2 + \dots + m'_n)(m''_1 + m''_2 + \dots + m''_n)(m_1^{(\lambda)} + m_2^{(\lambda)} + \dots + m_n^{(\lambda)})$$

bildet, und zum Schlusse erst in diesem Produkte die oberen Indices weglässt, also genau proportional dem Polynomial Koeffizienten dieses Gliedes.

Denn das Symbol $m'_1 . m''_3 . m'''_7 \dots$ können wir so verstehen, dass auf den ersten Zug die dem ersten Moleküle entsprechende, auf den zweiten die dem dritten Moleküle entsprechende, auf den dritten die dem siebenten Moleküle entsprechende Kugel etc. gezogen wurde.

from which comes out, that the probability of the larger alive forces is so disproportionate that the whole expression does not approach a unique definite boundary when k , λ , $\frac{1}{\epsilon}$ and n increase.

We want now to go over to the second possible definition of the most probable status distribution .

We must consider there all J complexions, which we formed thereby that we have pulled λ balls J times from our urn

One of that different possible complexions will consists in the fact that the ball corresponding to those first molecule is pulled in all λ pullings.

We want to express this complexion symbolically by $m_1^\lambda m_2^0 m_3^0 \dots m_n^0$.

We want to express a second complexion, whereby the ball corresponding to the first molecules was pulled on $\lambda - 1$ pullings the ball corresponding to the second on one pulling , as

We see that the different possible complexions expressed by the different terms, appear exactly as their total after the polynomial development with the powers

the probability of each such complexion is exactly proportional to the number which indicates, how many terms transform into the corresponding term of the power, if one forms first the product

and in the end only in omitting in this product the upper indices, thus these terms are exactly proportional to the polynomial coefficient of this equation.

Because we can understand the symbol $m'_1 . m''_3 . m'''_7 \dots$ in such a way that on the first pulling was pulled the ball corresponding to the first molecule , on the second pulling the ball corresponding to the third molecules , on the third pulling the ball corresponding to the seventh molecule etc..

Es stellen dann alle möglichen Producte der Grössen m'_1, m''_1, m'_2 u. s. v. lauter gleich wahrscheinliche Complexionen dar.

Wir wollen wissen, wie oftmal unter sämtlichen Gliedern der entwickelten Potenz A , deren Gesamtzahl gleich n^λ ist, wenn man jedes Glied so oft genommen denkt, als sein Koeffizient Einheiten enthält, irgend eine Zustandsverteilung enthalten sei. Betrachten wir als Beispiel die Zustandsverteilung, wobei ein Molekül die gesamte lebendige Kraft hat, alle übrigen die lebendige Kraft 0 haben.

Dieser Zustandsverteilung entsprechen offenbar folgende Glieder der entwickelten Potenz A

$$m_1^\lambda m_2^0 m_3^0 \dots, m_1^0 m_2^\lambda m_3^0 \dots, m_1^0 m_2^0 m_3^\lambda \dots, \quad (\text{etc.})$$

im Ganzen λ an der Zahl.

Ebenso entsprechen der Zustandsverteilung, in welcher w_0 Moleküle die lebendige Kraft Null, w_1 Moleküle die lebendige Kraft ε , w_2 Moleküle die lebendige Kraft 2ε u. s. w. haben in Ganzen

$$\frac{\lambda!}{w_0! w_1! w_2! \dots w_\lambda!}$$

Glieder der entwickelten Potenz (A).

Jedes dieser Glieder hat den nämlichen Polynomkoeffizienten, und zwar ist derselbe

$$\frac{\lambda!}{(0!)^{w_0} \cdot (1!)^{w_1} \cdot (2!)^{w_2} \dots (\lambda!)^{w_\lambda}}.$$

Im Ganzen ist daher nach der jetzt angenommenen Definition die Wahrscheinlichkeit dieser Zustandsverteilung

$$\frac{(\lambda!)^2}{n^\lambda} \cdot \frac{1}{w_0! w_1! w_2! \dots w_\lambda!} \cdot \frac{1}{(0!)^{w_0} \cdot (1!)^{w_1} \cdot (2!)^{w_2} \dots (\lambda!)^{w_\lambda}}.$$

Die Aufsuchung des Maximalwertes dieser Grösse führt jedoch ebenfalls nicht auf die dem Wärmegleichgewichte entsprechende Zustandsverteilung.

Then all possible products of the quantities m'_1, m''_1, m'_2 etc. represent equally probable complexions.

We want to know, how many times among all terms of the developed power A , whose total number is equal to n^λ , if one thinks each term is taken as often as its coefficient contains one's, is possibly contained in a status distribution. We regard as example of the status distribution, whereby a molecule has the entire alive force, all the remaining having alive force 0.

The following terms of the developed power correspond obviously to the status distribution A

for all λ (???.).

Likewise correspond the state distribution, into which w_0 molecules have the alive force zero, w_1 molecules the alive force ε , w_2 molecules the alive force 2ε etc. in the whole

terms of the developed power (A).

Each of these members has the corresponding polynomial coefficient,

Therefore in the whole according to the definition assumed now the probability of this status distribution is

Looking up the maximum value of this quantity does not lead however to that status distribution corresponding to the heat equilibrium.

- 5 **V. Beziehung der Entropie zu derjenigen Grösse, welche ich als die Vertheilungswahrscheinlichkeit bezeichnet habe.**
V. Relationship of the entropy with that quantity, which I called the probability of distribution.

Wir wollen uns bei Betrachtung dieser Beziehung zunächst wieder mit dem einfachsten und klarsten Falle beschäftigen, indem wir zuerst ein einatomiges Gas der Untersuchung unterziehen, auf welches keinerlei äussere Kräfte wirken. In diesem Falle gilt die Formel (34) des II. Abschnittes.

Um jedoch dieser Formel die volle Allgemeinheit zu geben, müssen auch noch die Coordinaten x, y, z des Ortes, wo sich ein Molekül befindet, eingeführt werden.

Das Maximum des so verallgemeinerten Ausdruckes (34) liefert dann auch die Verteilung der ganzen Gasmasse in dem sie umschliessenden Gefässe, nicht aber nur die Verteilung der Geschwindigkeitscomponenten unter den Gasmolekülen, welche für den dort betrachteten Fall genügte, weil dort als selbstverständlich vorausgesetzt wurde, dass die Gasmasse das Gefässe gleichförmig erfüllt.

Der so verallgemeinerte Ausdruck (34) für das Permutabilitätsmass kann leicht aus Formel (51) gefunden werden, indem man in dieser Formel statt $p_1 p_2 \dots q_r$ substituirt, x, y, z, u, v, w und die Ausdrücke mit den accentuirten Buchstabe einfach weglässt. Er lautet folgendermassen:

$$\Omega = - \int \int \int \int \int \int f(x, y, z, u, v, w) \ell f(x, y, z, u, v, w) dx dy dz du dv dw \tag{61}$$

wobei $f(x, y, z, u, v, w)$, dx, dy, dz, du, dv, dw die Anzahl der Gazmoleküle vorstellt, für welche die sechs Variablen x, y, z, u, v, w zwischen den Grenzen x und $x + dx$, y und $y + dy$, z u.s.w. w und $w + dw$ liegen und die Integration bezüglich der Geschwindigkeitscomponenten von $-\infty$ bis $+\infty$, bezüglich der Coordinaten über das ganze Gefäss zu erstrecken ist, in welchem sich das Gas befindet.

Wir wissen, dass, wenn das Gas früher nicht im Wärmegleichgewichtes züilt, diese Grösse notwendig wachsen muss.

Wir wollen jetzt den Wert berechnen, welchen diese Grösse hat, wenn das Gas den Zustand des Wärmegleichgewichtes erreicht hat.

Sei V das gesammte Volumen des Gases, T die mittlere lebendige Kraft eines Gasmoleküles und N die Gesamtzahl aller Moleküle des Gases, endlich m die Masse eines Gasmoleküles, so ist für den Zustand des Wärmegleichgewichtes

$$f(x, y, z, u, v, w) = \frac{N}{V \left(\frac{4\pi T}{3m}\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot e^{-\frac{3m}{4T}(u^2+v^2+w^2)}$$

Substituirt man diesen Wert in Gleichung (61), so erhält man

We want to be occupied with view of this relationship first again with the simplest and clearest case, by submitting first a monatomic gas to the investigation, on which no outside forces work. In this case the formula (34) of the IIth paragraph applies.

However in order to give to this formula the full generality, the coordinates, x, y, z giving the place, where a molecule is must also still be introduced

The maximum of this generalization of expression (34) then supplies also with the distribution of the whole gas mass that is in the enclosing container, not however only the distribution of the velocity components among the gasmolecules, which were sufficient for the case considered there, because it was naturally presupposed there that the gas mass fills the container homogeneously.

The generalized expression (34) for the permutability mass can be found easily from formula (51), by substituting in this formula $p_1 p_2 \dots q_r$, instead of x, y, z, u, v, w and simply omitting the expression with the accented letters. It reads as follows:

where $f(x, y, z, u, v, w) dx dy dz du dv dw$ represents the number of gas molecules, for which the six variables x, y, z, u, v, w are situated between the boundaries x and $x + dx$, y and $y + dy$, z etc. w and $w + dw$ and the integration concerning the velocity components is computed from $-\infty$ to $+\infty$, the integration concerning the coordinates is to be extended over the whole container, in which the gas is.

We know that, if the gas had not reached in former times the heat equilibrium this quantity must necessarily grow.

We want to calculate now the value this quantity takes when the gas has achieved the status of the heat equilibrium.

If V is the total volume of the gas, T the average alive force of a gas molecule and N the total amount of all molecules of the gas, finally m the mass of a gas molecule, then for the status of the heat equilibrium we have

If one substitutes this value in equation (61), then one gets

$$\Omega = \frac{3N}{2} + N\ell \left[V \left(\frac{4\pi T}{3m} \right)^{\frac{3}{2}} \right] - N\ell N \quad (62)$$

Versteht man nun unter dQ das dem Gase zugeführte Wärmedifferentiale, so ist

If one understands dQ as the heat differential supplied to the gas, then we have

$$dQ = NdT + pdV \quad (63)$$

und

and

$$pV = \frac{2N}{3} \cdot T \quad (64)$$

p ist der Druck, bezogen auf die Flächeneinheit. Die Entropie des Gases ist dann :

p is the pressure by unit area. The entropy of the gas is then:

$$\int \frac{dQ}{T} = \frac{3}{2} N \cdot \ell \left(V \cdot T^{\frac{3}{2}} \right) + C$$

Da hier N als eine rein Constante anzusehen ist, so ist bei passender Bestimmung dieser Constante

Since N is to be regarded here as purely constant, then with suitable determination of these constant we have

$$\int \frac{dQ}{T} = \frac{2}{3} \Omega \quad (65)$$

Hieraus folgt, dass für jede sogenannte umkehrbare Zustandsänderung, d. h. für jede solche, wobei das Gas während der ganzen Zustandsänderung sich im Wärmegleichgewichte befindet, oder wenigstens mit unendlicher Annäherung als darin befindlich betrachtet werden kann, der Zuwachs des mit $\frac{2}{3}$ multiplicirten Permutabilitätsmasses Ω gleich dem $\int \frac{dQ}{T}$ über die ganze Zustandsänderung erstreckt, also gleich dem Zuwachse der Entropie ist.

From this it follows that for any so-called reversible change in status, i.e. for any change where the gas can be regarded during the whole change in status in heat equilibrium or at least with infinite approximation as present in this state, the increase of the permutability masses ω multiplied by $\frac{2}{3}$ is equal to $\int \frac{dQ}{T}$ calculated over the whole change in status, thus is equal to the increase of the entropy.

Werde in der Tat dem Gase eine sehr kleine Wärmemenge dQ zugeführt, so dass auch dessen Temperatur und Volumen dT und dV wachsen. Dann folgt aus den Gleichungen (63) und (64)

Indeed one supply to the gas a very small dQ amount of heat, so that also its temperature and volumes dT and dV grow. Then from the equations (63) and (64) it follows

$$dQ = NdT + \frac{2N}{3V} \cdot TdV,$$

während man aus der Gleichung (62) findet: while one finds from the equation (62):

$$d\Omega = +N \frac{dV}{V} + \frac{3N}{2} \cdot \frac{dT}{T}$$

Es ist nun bekannt, dass, wenn in einem Systeme von Körpern lauter umkehrbare Veränderungen vor sichgehen, dann die Gesamtsumme der Entropie aller dieser Körper constant bleibt.

It is now well-known that, if in systems of bodies only reversible modifications take place then the total amount of the entropy of all these bodies remains constant.

Sind dagegen unter den Vorgängen auch nicht umkehrbare, so muss die Gesamtentropie aller Körper notwendig wachsen, wie bekanntlich aus dem Umstande folgt, dass $\frac{dQ}{T}$ über einen nicht umkehrbaren Kreisprozess integriert, negativ ist.

Gemäss der Gleichung (65) muss also auch die Summe der Permutabilitätsmasse aller Körper $\Sigma\Omega$ oder das gesammte Permutabilitätsmass derselben zunehmen.

Es ist daher das Permutabilitätsmasse eine Grösse, welche für den Zustand des Wärmegleichgewichtes bis auf einen constanten Factor und Addenden mit der Entropie identisch ist, welche aber auch während des Verlaufes eines nicht umkehrbaren Körpers einen Sinn behält, und auch während eines solchen fortwährend zunimmt.

Es lassen sich also zunächst zwei Sätze aufstellen :

der erste bezieht sich auf ein System von Körpern, in welchem verschiedene Zustandsänderungen vorgegangen sind, von denen wenigstens einige nicht umkehrbar sind;

d. h. , wo wenigstens bei einigen das System der Körper nicht fortwährend im Wärmegleichgewichte war.

Wenn dieses System vor und nach dem Verlaufe aller dieser Zustandsveränderungen im Wärmegleichgewichte war, so kann die Summe der Entropie aller Körper des Systems vor und nach jenen Zustandsveränderungen ohne weiters berechnet werden, und ist jedesmal gleich dem mit $\frac{2}{3}$ multiplicirten Permutabilitätsmasse aller dieser Körper.

Der erste Satz geht nun dahin, dass die gesammte Entropie nach den Zustandsveränderungen immer grösser als vor denselben ist;

dasselbe gilt natürlich auch von dem Permutabilitätsmasse.

Der zweite Satz bezieht sich auf ein Gas, das einen Zustandsveränderung durchmacht, ohne dass es gerade am Anfang und Ende desselben im Wärmegleichgewichte zu sein braucht.

Es lässt sich dann für den Anfangs- und Endzustand des Gases nicht die Entropie, wohl aber noch immer die Grösse berechnen, welche wir das Permutabilitätsmass genannt haben;

und zwar wird wieder der Wert derselben nach der Zustandsverteilung notwendig grösser als vor derselben sei.

On the contrary, if the processes are not reversible , then the total entropy of all bodies must necessarily grow, as from the circumstance it follows as well known that $\frac{dQ}{T}$ integrated over a non-reversible cyclic (?) process, is negative.

In accordance with the equation (65) thus also the sum of the permutability mass $\Sigma\Omega$ of all bodies or the total permutability mass must increase .

Therefore the permutability mass is a quantity, which is identical to the entropy for the status of the heat equilibrium, up to a constant factor and an addition, which in addition also increases during such a process , if a not-reversible process among the bodies keeps a sense.

Thus first two results can be set up:

The first refers to a system of bodies, in which different changes in status occur, among which at least one is not reversible;

i.e., where at least with some the bodies of the system was not perpetually (?) in heat equilibrium.

If this system was in heat equilibrium before and after all of these status modifications, then the total of the entropies of all bodies of the system before and after those status modifications can be calculated directly, and is each time equal to the permutability masse of all these body multiplied by $\frac{2}{3}$.

The first results can be stated : that the total entropy is always larger after the status modifications than before;

the same applies naturally also for the permutability mass.

The second result refers to a gas, which goes through status modification, without it needs to be in heat equilibrium even at the start and end.

Then however, at the beginning and final state of the gas, the entropy cannot be calculated, probably however still the quantity which we have called the permutability mass can be ;

again this value becomes necessarily larger after the status distribution than before

Wir werden sogleich sehen, dass sich der letztere Satz ohne Schwierigkeit auf ein System von mehreren Gasen, so wie auch auf den Fall ausdehnen lässt, dass die Gasmoleküle mehratomig sind und äussere Kräfte auf dieselben wirken.

Bei einem Systeme mehrerer Gase muss als Permutabilitätsmass des Systems die Summe der Permutabilitätsmassen der einzelnen Gase definiert werden, führt man dagegen die Permutabilität selbst ein, so wäre die Permutabilität eines Systems das Product der Permutabilitäten der Bestandtheile.

Setzen wir die Ausdehnbarkeit des letzteren Satzes für beliebige Körper voraus, so stellen sich die beiden eben besprochenen Sätze nur als specielle Fälle eines einzigen allgemeinen Satzes heraus, welcher folgendermassen lautet:

Denken wir uns ein beliebiges System von Körpern gegeben, dasselbe mache eine beliebige Zustandsveränderung durch, ohne dass notwendig der Anfangs- und Endzustand Zustände des Gleichgewichtes zu sein brauchen, dann wird immer das Permutabilitätsmass aller Körper im Verlaufe der Zustandsveränderungen fortwährend wachsen und kann höchstens constant bleiben, so lange sich sämtliche Körper während der Zustandsveränderung mit unendlicher Annäherung im Wärmegleichgewichte befinden (umkehrbare Zustandsveränderungen).

Um ein Beispiel zu geben, betrachten wir ein Gefäss, welches durch eine unendlich dünne Scheidewand in zwei Hälften geteilt wird.

Die übrigen Wände des Gefässes sollen ebenfalls geteilt werden.

Die übrigen Wände des Gefässes sollen ebenfalls sehr dünn sein, so dass die Wärme, welche sie aufnehmen, vernachlässigt werden kann, und sollen rings von anderen sehr bedeutenden Gasmassen umgeben sein.

Die eine Hälfte des Gefässes soll mit einem absoluten Gase angefüllt sein, während die andere ursprünglich vollkommen leer ist.

Durch plötzliches Hinwegziehen der Scheidewand, was aber keine bemerkbare Arbeitsleistung erfordern soll, wird zunächst bewirkt, dass sich jenes Gas im ganzen Gefässe ausbreitet.

Berechnen wir das Permutabilitätsmass für das Gas, so finden wir, dass dasselbe während dieses Vorganges zunimmt, ohne dass irgend eines anderen Körpers sich verändert.

Nun soll das Gas durch einen schweren Stempel in umkehrbarer Weise auf sein altes Volumen komprimiert werden.

We can immediately see that the latter result can be expanded without difficulty since outside forces affect in the same way a system of several gas, as gasmolecules composed of several atoms.

In a systems of several gases the sum of the permutability masses of the individual gases must be defined as the permutability mass of the system, if one introduces on the contrary the permutability itself, then the permutability of a system would be the product of the permutabilities the constituents.

If we presuppose the expansibility of the latter result for any bodies, then the two evenly discussed results turn out only as special cases of a only one general record, which reads as follows:

If we think any system of bodies given, that goes through any status modification, without needing necessarily to be in the statuses of the equilibrium at the beginning of and final state, then the permutability mass of all bodies subject to the status modifications always grow perpetually, and can remain at almost constant, if all the bodies under status modification are in heat equilibrium with infinite approximation (reversible status modifications).

In order to give an example, we consider a container, which is divided by an infinitely thin partition wall into two halves.

The remaining walls of the container are divided likewise.

The remaining walls of the container should be likewise very thin so that the warmth, which they take up, can be neglected, and should be surrounded by other very tenuous gas masses.

One half of the container should be filled with an absolute gas, while the other one is originally perfectly empty.

By sudden pulling away of the separating wall which is however to require no noticeable work, it is first caused that the gas spreads in the whole container.

If we calculate the permutability mass for the gas, then we find that it increases during this process, without that possibly another body changes

Now the gas is to be compressed by a heavy stamp in reversible way to its old volume.

Um durchaus mit Gasen zu manipulieren, können wir, wenn wir wollen, annehmen, dass der Stempel ebenfalls durch ein schweres Gas vorgestellt wird, welches rings von unendlich dünnen, festen Wänden umschlossen wird.

Mit diesem Gase geschieht weiter nichts, als dass es sich im Raume herabsenkt.

Da das Permutabilitätsmass von der absoluten Lage im Raume nicht abhängt, so ändert sich das Permutabilitätsmass des im Stempel eingeschlossenen Gases hiebei nicht;

das des Gases, welches sich im Gefässe befindet, sinkt auf den anfänglichen Wert, da ja dieses Gas einen Kreisprocess durchgemacht hat.

Da jedoch derselbe nicht umkehrbar war, so ist $\int \frac{dQ}{T}$ über ihn erstreckt, nicht gleich der Differenz des Anfangs- und Endwertes der Entropie, sondern um die bei der Ausdehnung vorgegangene uncompensirte Verwandlung kleiner.

Dagegen ist Wärme an die umgebenden Gasmassen abgegeben worden. Für diese umgebenden Gasmassen hat also das Permutabilitätsmass zugenommen, und zwar um ebensoviele, als während des ersten

Denn weil letztere Gasmasse einen Kreisprocess durchmachte, nahm ihre Entropie, nicht aber $\int \frac{dQ}{T}$, während des zweiten Vorganges um ebensoviele ab, als sie während des ersten zunahm; und weil der zweite Vorgang umkehrbar war, nahm während desselben die Entropie des umgebenden Gases um ebensoviele zu, als die des eingeschlossenen abnahm.

Das Resultat ist also, wie es auch sein muss, dass die Summe der Permutabilitätsmasse aller vorhandenen Gasarten zugenommen hat.

Für ein Gas, welches sich mit einer constanten Geschwindigkeit in der Richtung der x -Axe fortbewegt, ist

In order to manipulate with gases, we, if we want, can assume that the stamp is likewise visualized by a heavy gas, which is enclosed by infinitely thin, fixed walls .

With this gas almost nothing occurs, than that it down-lowers itself in the space.

Since the permutability mass does not depend on the absolute position in the space, then the permutability mass of the gas included in the container (?) does not change here;

that of the gas, which is in the container, sinks to the initial value, since this gas went through a cyclic process.

Since however this process was not reversible, then $\int \frac{dQ}{T}$ extended over it, is not equal to the difference between the value of the entropy at the beginning and end of the process, but smaller for the sake of the uncompensated conversion occuring during the expansion (???...).

On the other hand warmth was transferred to the surrounding gas masses. Thus for these surrounding gas masses the permutability mass increased, over just as much, as during the first process the permutability mass of the gas included in the container increased.

Because since the latter gas mass went through a cyclic process, their entropy, but not $\int \frac{dQ}{T}$, decreased during the second process just as much as it increased during the first; and because the second process was reversible, the entropy of the surrounding gas increased just as much during this process, while those of the enclosed decreased.

The result is thus, as it must also be, that the sum of the permutability mass of all available gas kinds increased.

For a gas, which moves itself, with a constant speed along the x -Axis direction, we have

$$f(x, y, z, u, v, w) = V \frac{N}{\sqrt{\left(\frac{4\pi T}{3m}\right)^3}} \cdot e^{-\frac{3m}{4T} [(u-\alpha)^2 + v^2 + w^2]} \tag{66}$$

Substituirt man diesen Wert in die Formel (61), so ergibt sich genau wieder der Ausdruck (62).

If one substitutes this value into the formula (61), then results exactly again the expression (62) .

Die progressive Massenbewegung des Gases vermehrt also dessen Permutabilitätsmass durchaus nicht, und dasselbe gilt von der lebendigen Kraft jeder anderen sichtbaren Massenbewegung (Molarbewegung), weil dieselbe auf ein Fortschreiten der einzelnen Volumenlemente und eine von höherer Ordnung unendlich kleine, daher ganz einflusslose Deformation und Drehung, derselben zurückgeführt werden kann.

Hierbei ist natürlich von der Veränderung des Permutabilitätsmasses ganz abgesehen, welche durch etwa mit jener Molarbewegung verbundene Dichtigkeits - und Temperaturveränderung bewirkt wird.

Here is naturally completely ignored the modification of the permutability mass, which is caused for instance by modification of density connected with that molecular movement - and temperature.

Unter der Temperatur T des fortschreitenden Gases ist der halbe Mittelwert von $m[(u - \alpha)^2 + v^2 + w^2]$ verstanden.

Sind also derartige Dichtigkeits - und Temperaturveränderungen nicht vorhanden, (z. B. wenn ein Gas sammt umschliessenden Gefäss frei fällt) so hat eine sichtbare Massenbewegung keinen Einfluss auf das Permutabilitätsmass, und ihre ganze lebendige Kraft kommt der Vermehrung der Verteilung wahrscheinlich zu Gute, sobald sich dieselbe in Wärme umsetzt;

weshalb auch Molarbewegung als Wärme von unendlicher Temperatur bezeichnet wird.

Gehen wir jetzt zu einem einatomigen Gase über, auf welches die Schwerkraft wirkt.

Für dasselbe wird das Permutabilitätsmass durch die Formel (51) gegeben, wobei jedoch statt der verallgemeinerten Coordinaten wieder x, y, z, u, v, w einzuführen sind.

Die Formel (51) liefert uns also für Ω einen Wert, welche völlig mit dem Ausdrucke (61) identisch ist. Für den Fall des Wärmegleichgewichtes hat man

$$f(x, y, z, u, v, w) = C e^{-\frac{3}{2T} \left(gz + \frac{m\omega^2}{2} \right)} \quad (67)$$

wobei

where

$$\omega^2 = u^2 + v^2 + w^2$$

ist.

Die Konstante C wird durch die Dichtigkeit des Gases bestimmt.

Hat man z.B. ein prismatisches Gefäss von der Höhe h mit horizontaler Boden - und Gegenfläche, deren Flächeninhalt $= q$ sei.

Thus the progressive mass movement of the gas does not increase its permutability mass at all, and the same applies from the alive force of every other visible mass movement (molecular movement), because the same effect can be attributed for the evolution of an individual volume element and, a quite infinitely small of higher order and so, influenceless deformation and rotation (???)

Under the temperature T of the progressive gas is understood the half average value of $m[(u - \alpha)^2 + v^2 + w^2]$.

Thus such density - and temperature modifications are not considered, (e.g. if a gas enclosing container freely falls) where a visible mass movement has no influence on the permutability mass, and its whole alive force comes from the appropriate addition of the distributions of probability, as soon as they transfer themselves into warmth;

that is also why warmth due to molecular movement is called infinite temperature.

We turn into now to a monatomic gas, which the force of gravity affects.

For the same the permutability mass is given by the formula (51), whereby however instead of the generalized coordinates x, y, z, u, v, w are to be introduced again.

The formula (51) supplies us thus for ω a value, which is completely identical to the expression (61). For the case of the heat equilibrium has one

The constant C is determined by the density of the gas.

One has e.g. a prismatic container of height h with horizontal bottom, whose area is $= q$.

Sei ferner N die Gesamtzahl der Gasmoleküle in diesem Gefässe, und bezeichne z die Höhe eines Gasmoleküls über dem Boden de Gefässes, so ist

Furthermore if N is the total amount of the gas molecules in this container, and defines z the height of a gas molecule over the bottom of the container, then

$$C = \frac{N}{\left(\frac{4\pi T}{3m}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot q \int_0^h e^{-\frac{3gz}{2T}} dz} = \frac{N}{\left(\frac{4\pi T}{3m}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot q \cdot \frac{2T}{3gz} \left(1 - e^{-\frac{3gh}{2T}}\right)} \quad (68)$$

woraus sich ergibt :

from which arises:

$$\Omega = \frac{3N}{2} + N\ell \left(\frac{4\pi T}{3m}\right)^{\frac{3}{2}} + N\ell q + N\ell \frac{2T}{3gh} \left(1 - e^{-\frac{3gh}{2T}}\right) + N \left(1 - \frac{3ghe^{-\frac{3gh}{2T}}}{2T \left(1 - e^{-\frac{3gh}{2T}}\right)}\right) - N\ell N \quad (69)$$

Man sieht aus der letzten Formel sogleich, dass, wenn das schwere Gas ein Stück tiefer herabfällt, ohne sonst im Innern eine Veränderung zu erfahren, die Grösse Ω ihren Wert nicht im mindesten ändert (selbstverständlich ist dabei die Schwerkraft als constante vertical nach abwärts wirkende Kraft voraus gesetzt, und deren Zunahme mit der Annäherung zum Endmittelpunkt vernachlässigt, was ja bei dertartigen wärme-theoretischen Problemen immer Gestattet ist.

One sees immediately from the last formula that, if a piece of heavy gas falls down more deeply without any internal modification, the quantity Ω does not modify its value by any means (naturally there the force of gravity is a constant vertical force working downward), if we neglect its increase with the approximation of the final barycenter, which is always permitted for such warm-theoretical problems.

Gehen wir jetzt zum ganz allgemeinen Falle eines beliebigen Gases über, auf welches beliebige äussere Kräfte wirke, so haben wir wieder die Formel (51) anzuwenden.

We come up now over to the quite general case of any gas, on which any outside forces work, then we have again to apply the formula (51).

Damit jedoch die Formeln nicht zu weitläufig werden, soll nur eine einzige Gasart im Gefässe vorhanden sein.

However so that the formulas become not too extensive, only one type of gas is to be available in the container.

Das Permutabilitätsmasse eines Gasgemisches lässt sich dann ohne Schwierigkeit finden, da es einfach gleich der Summe der Permutabilitätsmass ist, welche jedem Bestandteile zukämen, wenn er allein im Gefässe vorhanden wäre.

The permutability mass of a gas mixture can be found then without difficulty, since it is simply equal to the total of the permutability masses, which each constituents would have, if it were available alone in the container.

Für den Fall des Wärmegleichgewichtes ist dann

For the case of the heat equilibrium is then

$$f = \frac{Ne^{-h(\chi+L)}}{\int \int e^{-h(\chi+L)} do dw},$$

wobei χ die Kraftfunction, L die lebendige Kraft eines Moleküls, N die Zahl der Moleküle im Gefässe,

where χ is the force function, L the alive force of a molecule, N the number of the molecules in the container,

$$do = dp_1 dp_2 \dots dp_r, dw = dq_1 dq_2 \dots dq_r$$

ist.

Es ergibt sich also

It results thus

$$\Omega = - \int \int f \ell f d o d w = -N \ell N + N \ell \int \int e^{-(\chi+L)} d o d w + h N \bar{\chi} + \frac{r N}{2} \quad (70)$$

Im vorletzten Gliede bedeutet $\bar{\chi}$ die mittlere Kraftfunktion eines Moleküls, also die Grösse

In the last but one member $\bar{\chi}$ means the average force function of one molecule, that is the quantity

$$\frac{1}{N} \int \int \chi f d o d w = \frac{\int \int \chi e^{-(\chi+L)} d o d w}{\int \int e^{-(\chi+L)} d o d w}$$

Das letzte Glied findet man, indem man berücksichtigt, dass

One finds the last member, by considering that

$$L = \frac{\int \int \kappa e^{-(\chi+L)} d o d w}{\int \int e^{-(\chi+L)} d o d w} = \frac{r}{2h}$$

ist.

(Vergl. hierüber und in Betreff des folgenden das bereits citirte Buch Watson's, seite 36 und 37.)

(viz. concerning this and related points the book of Watson already cited, page 36 and 37.)

Das zweite Glied der rechten Seite der Gleichung (70) kann noch transformirt werden wenn man statt $q_1 q_2 \dots q_r$ Variablen $s_1 s_2 \dots s_r$ einführt, welche die Eigenschaft haben, dass sich der Ausdruck L auf $s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_r^2$ reducirt.

The second member of the right side of the equation (70) still can be transformed if one introduces instead of $q_1 q_2 \dots q_r$, the variables $s_1 s_2 \dots s_r$, which have the characteristic that it reduces the expression L to $s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_r^2$.

Bezeichnet man dann mit Δ die Functional-determinante

If one names then δ the functional determinant

$$\Sigma \pm \frac{\partial q_1}{\partial s_1} \frac{\partial q_2}{\partial s_2} \dots \frac{\partial q_r}{\partial s_r},$$

so ist

so

$$\int \int e^{-h(\kappa+L)} d o d w = \left(\frac{\pi}{h}\right)^{\frac{r}{2}} \int \Delta e^{-h\chi} d o, \bar{\chi} = \frac{\int \Delta \chi e^{-h\chi} d o}{\int \Delta e^{-h\chi} d o}$$

und es ergibt sich also

and it results thus

$$\Omega = N \ell \int \Delta e^{-h\chi} d o - \frac{N r}{2} \ell h + h N \bar{\chi} + \frac{r N}{2} (1 + \ell \pi) - N \ell N \quad (71)$$

Um diesen Ausdruck mit dem Ausdrucke (18) meiner Abhandlung " Analytischer Beweis des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie aus Sätzen über das Gleichgewicht der lebendige Kraft " oder mit dem Ausdrucke (95) meiner " Weiteren Studien " vergleichen zu können, muss man $p_1 p_2 \dots$ mit $x_1 y_1 \dots$, $q_1 q_2 \dots$ mit $u_1 v_1 \dots$, $s_1 s_2 \dots$ mit $\sqrt{\frac{m}{2}} u_1$, $\sqrt{\frac{m}{2}} v_1, \dots$, r mit $3r$ vertausche, wodurch $\Delta = \left(\frac{2}{m}\right)^{\frac{3r}{2}}$ wird.

In order to be able to compare this expression with the expression (18) of my paper "analytic proof of the second main theorem of the mechanical heat theory from results about the equilibrium of the alive force " or with the expression (95) of my " further studies ", one must also exchange $p_1 p_2 \dots$ with $x_1 x_2 \dots$, $q_1 q_2 \dots$ with $u_1 v_1 \dots$, $s_1 s_2 \dots$ with $\sqrt{\frac{m}{2}} u_1$, $\sqrt{\frac{m}{2}} v_1, \dots$, r with $3r$, whereby δ becomes $\delta = \left(\frac{2}{m}\right)^{\frac{3r}{2}}$.

Man sieht, dass der Ausdruck (71) genau mit dem mit $\frac{3N}{2}$ multiplicirten Ausdrucke (18) der zuerst genannten Abhandlung bis auf eine additive Constante stimmt, wobei der Faktor N daher stammt, dass der Ausdruck (18) nur für ein Molekül berechnet ist.

Der Ausdruck (95) der "Weiteren Studien" ist entgegengesetzt bezeichnet, als Ω folglich auch als die Entropie.

Mit negativem Zeichen genommen aber ist er um $N\ell N$ grösser als Ω .

Ersteres rührt daher, dass ich in den weiteren Studien eine Grösse suchte, die abnehmen muss, letzteres daher, dass ich daselbst die Grösse f^* statt f einführte, was jedoch wenig zweckentsprechend ist.

Aus dieser Übereinstimmung folgt, dass ganz dasselbe, was wir bei Betrachtung eines einatomigen Gases bezüglich der Beziehung der Entropie zum Permutabilitätsmasse gesagt haben, auch in diesem weit

Bis hierher können die Sätze an der Hand der Gastheorie vollkommen exact bewiesen werden.

Versucht man jedoch eine Verallgemeinerung derselben auf tropfbar-flüssige und feste Körper, so muss auf eine vollkommen exacte Durchführung von vornherein verzichtet werden, da die Natur der letzteren Aggregatzustände viel zu wenig bekannt und deren Theorie noch fast gar nicht mathematisch durchgearbeitet ist.

Doch habe ich schon in früheren Abhandlungen die Gründe angeführt, vermöge deren es wahrscheinlich ist, dass auch für diese beiden Aggregatzustände das Wärmegleichgewicht dadurch bestimmt ist, dass der Ausdruck (51) ein Maximum wird, und dass dieser Ausdruck, sobald Wärmegleichgewicht besteht, mit der Entropie identisch ist.

Es kann daher als wahrscheinlich bezeichnet werden, dass die Giltigkeit der von mir entwickelten Sätze nicht bloss auf Gase beschränkt ist, sondern dass dieselben ein allgemeines, auch auffeste und tropfbarflüssige Körper anwendbares Naturgesetz darstellen, wenngleich eine exacte mathematische Behandlung aller dieser Fälle dermalen noch auf ausserordentliche Schwierigkeiten zu stossen scheint.

One sees, that the expression (71) is exactly the expression (18) multiplied by $\frac{3N}{2}$ of the paper specified first up to additive constants, whereby the factor N therefore comes since the expression (18) is calculated only for one molecule.

Accordingly the expression (95) of the "further studies" is contrarily defined, as Ω also as the entropy (?).

However when signs are negative, $N\ell N$ is larger than Ω .

First therefore it follows (?) that a quantity I considered in the further studies, which must decrease so that I introduced the quantity f^* instead of f , which was however not very appropriate.

From this agreement it follows that what we said with view of a monatomic gas concerning the relationship of the entropy to the permutability mass also this far applies to more general case.

Until here the theorems with the hand (?) of the gas theory become can proven perfectly exactly

If one tries however a generalization to drip-like liquid and solid bodies, then must be done a perfectly rigorous writing from the beginning, since the nature of the latter admits states of aggregation and their theory is still not much mathematically completed.

But I have already given in earlier papers the reasons, that are probable, that also for these two states of aggregation the heat equilibrium is defined by the fact that the expression (51) becomes a maximum, and that this expression, as soon as heat equilibrium exists, is identical to the entropy.

It can be called therefore probable that the application of the results developed by me is not only limited to gases, but that the same represent a general law of nature, also applicable to up-solid and drip-like liquid bodies, although a exacte mathematical handling seems to encounter still extraordinary difficulties in all these cases.