R. Prony (1795). "Essai éxperimental et analytique: sur les lois de la dilatabilité de fluides élastique et sur celles de la force expansive de la vapeur de l'alkool, à différentes températures". Journal de l'École Polytechnique Floréal et Plairial, an III (1795), volume 1, cahier 22, 24-76.

Le travail de Prony est souvent cité, il n'est pas toujours facile d'obtenir une copie de l'original ; j'ai pensé qu'il serait intéressant pour quelques lecteurs curieux des origines du traitement du signal d'en avoir une transcription ; on remarque que plusieurs idées utiles dans les problèmes numériques d'identification de paramètres d'un modèle linéaire sont déjà présentes dans ce mémoire.

on peut consulter les pages

http: //www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Mathematicians/De_Prony.html

http: //www.statsci.org/other/prony.html

Pour tout commentaire, en particulier pour m'indiquer des sources d'autres documents sur les fondations du traitement des mesures,

me contacter à leroux@essi.fr

j le roux, décembre 2003

ESSAI EXPÉRIMENTAL

ET ANALYTIQUE

Sur les lois de la Dilatabilité des fluides élastiques et sur celles de la Force expansive de la vapeur de l'eau et de la vapeur de l'alkool, à différentes températures.

Par R. Prony.

CONSIDERATIONS GÉNÉRALES.

La physique s'est enrichie depuis environ quarante ans d'un grand nombre d'observations faites avec beaucoup de soin par des hommes savans et exercés. Ce dépôt s'augmente chaque jour, et la collection qu'il renferme devient de plus en plus précieuse, à mesure que la perfection des instrumens nouveaux donne plus de précision aux expériences : déjà l'esprit philosophique s'est emparé des faits multipliés, fournis par les observateurs ; les phénomènes ont été rapprochés, comparés, classés ; la langue d'une partie importante de la science est devenue analytique ; des théories raisonnables ont fait disparaître les systèmes futiles et souvent absurdes, dont on a occupé les écoles jusqu'au milieu de ce siècle.

L'étude de la nature ainsi ramenée à l'examen et à la connaissance effective de ses opérations, me paraît offrir deux objets de recherches qu'il ne faut pas confondre ; l'*explication des effets* et leur *mesure*.

L'explication des effets consiste à trouver, dans une classe de phénomènes composés, les phénomènes simples ou primitifs, dont tous les autres ne sont que des modifications ou les combinaisons diverses, et à faire voire comment on peut, à travers les apparences les plus variées, démêler l'action et la manière dêtre des élémens pris pour base du système. Ainsi en

partant

partant des affinités de certaines substances considérées comme phénomènes simples, on a trouvé que les phénomènes météorologiques, ceux de la combustion, etc. n'étaient que les résultats de ces mêmes affinités, se manifestant avec différentes formes sous lesquelles ils avaient été, jusqu'à ces derniers temps, cachés aux yeux des physiciens ; c'est à ces décompositions des effets complexes en effets simples, que se réduisent tous nos moyens de pénétrer quelques secrets de la nature, qui, en nous permettant de soulever une des extrémités du voile qui la couvre, tient l'autre attachée par un nœud que notre main ne saurait délier.

La *mesure* des effets est l'évaluation des différens degrés d'intensité, dont chacun est susceptible, lorsqu'on fait varier, soit les causes que le produisent, soit d'autres effets auxquels il est lié; on sait, par exemple, que la disposition des fluides à se vaporiser, est d'une part activée par le calorique, de l'autre coercée par la pression de l'atmosphère, et que la vaporisation n'a lieu que lorsque la première puissance l'emporte sur la seconde; mais il peut encore être nécessaire de réunir à cette donnée les valeurs des pressions qui, à différentes températures, font équilibre à la vaporisation; le même raisonnement est applicable à une infinité d'autres phénomènes.

On voit donc que *l'explication* des effets, dont le grand avantage est de simplifier la science, et d'en coordonner les différentes parties, par l'analyse et la décomposition des phénomènes composés, a un complément essentiel dans la *mesure* de ces mêmes effets qui est toujours très-utiles, et souvent indispensable, lorsqu'on veut appliquer les découvertes théoriques aux besoins de la société.

L'expérience peut seule fournir les premières données sur la mesure des effets physiques; mais le calcul s'y applique ensuite avec beaucoup d'avantage, soit pour obtenir les résultats intermédiaires à ceux trouvés par le fait, soit pour en corriger les anomalies. La méthode qu'on emploie dans le cas, est connue sous le nom d'*interpolation;* elle a pour objet de trouver une équation entre deux ou trois variables, telle que si on donne des valeurs déterminées à une ou deux de ces variables, il en résulte des valeurs pareillement déterminées pour la 2.^{e} ou 3.^{e}. Le problème considéré sous cet aspect, peut se résoudre d'une infinité de manières, parce qu'il y a une infinité de fonctions qui peuvent s'évanouir par les mêmes substitutions; mais ce serait une grande erreur de penser que toutes ces solutions sont également applicables à un cas proposé. La nature, quoique soumise à des lois générales, vraisemblablement très-simples et très-peu nombreuses, a autant de modifications particulières dans ses procédés, que de variétés dans ses formes, et chaque phénomène considéré sous l'aspect mensurable se rapporte toujours à une certaine fonction qui doit le représenter exclusivement.

Le problême de l'interpolation a donc deux parties très-distinctes; dans l'une, on se propose de satisfaire à des nombres donnés; dans l'autre, on cherche parmi toutes les fonctions qui remplissent cette condition, quelle est celle qui convient à l'espèce particulière des phénomènes qu'on traite.

J'ai donné, $n.^o$19 de mes lecons d'analyse, une solution de la premièer partie du problême qu'on emploie très-souvent, principalement comme méthode de correction; Lagrange a publié, sur le même objet, un très- beau mémoire (*), où il envisage la question plus généralement qu'on ne l'avait encore fait. Les élèves qui possèderont la théorie exposée $n.^{os}$18, 19, 20 *et* 21 de mes leçons, pourront, sans difficulté, entreprendre l'étude de cet ouvrage, et tireront un grand profit du temps qu'ils y auront consacré.

(*) Voyez les Mem.del'Acad. des Sciences *année 1772.*

La solution de la seconde partie ne paraît pas, dans l'état actuel de nos connaissances, susceptibles d'être soumise à des règles générales, surtout, lorsque les observations sont peu nombreuses, et n'embrassent pas une grande étendue; un examen attentif de tous les détails et de la marche des expériences, des essais réitérés, l'analogie, semblent être les seuls guides qu'on ait dans cette pénible recherche ; et ces difficultés jointe à celles de la précision dans les expériences, rendent les determinations exactes des lois des phénomènes très-rares en physique.

J'eus occasion, en 1790, de suivre des expériences très-détaillées et très-bien faites sur la force expansive de la vapeur de l'eau, et je me chargeai de chercher la formule qui les représentait. La régularité de la série des valeurs données, m'avait fait croire la tâche plus aisée qu'elle ne l'était réellement ; cependant, après quelque travail, je trouvai une espèce de fonction qui, non-seulement exprimait parfaitement les relations entre la température et le ressort du gaz aqueux, mais qui me parut pouvoir convenir en général aux phénomènes dépendant des fluides élastiques. Je les appliquai à des expériences que Prieur a faites avec beaucoup de soin sur la dilatabilité de l'air et de différens fluides aëriformes; cet essai me confirma dans mon opinion, et je me suis déterminé à publier mes résultats.

Le premier aperçu qui me dirigea vers la véritable forme de la fonction, fut la considération de quelques progressions géométriques qu'offrent certains phénomènes relatifs aux fluides élastiques, dont un des exemples les plus remarquables est la relation entre la densité des couches de l'atmosphère et leurs élévations respectives : cette loi étant exprimée par une exponentielle, je soupçonnai que dans l'autres circonstances, où une quantité de cette espèce serait insuffisante, on pourrait en introduire deux ou un plus grand nombre, et en généralisant ces idées, je fus conduit à une équation de la forme

$$\zeta = \mu_I \rho_I^x + \mu_{II} \rho_{II}^x + \mu_{III} \rho_{III}^x + \ldots\ldots\ldots + + \mu_{(n)} \rho_{(n)}^x$$

ζ et x étant les deux variables, μ_I, μ_{II}, μ_{III}, &c. ρ_I, ρ_{II}, ρ_{III}, &c. des constantes données par l'espèce particulière de phénomènes dont on veut trouver la loi.

On sait que l'équation précédente résulte de l'intégration d'une équation aux différences finies linéaires, ou donne le terme général d'une suite récurrente de l'ordre n; or, les suites de ce genre , dans lesquelles un terme quelconque se déduit d'un certain nombre de ceux qui le précèdent, paraissent en effet convenir aux effets naturels où l'élasticité joue un grand rôle; car la conservation de forces vives que comporte cette propriété des corps, fait toujours dépendre l'état actuel des états antécédens. Les recherches de Lagrange, dont j'ai parlé précédemment, sont aussi fondées sur les suites récurrentes; il a donné plusieurs méthodes pour trouver celles qui doivent interpoler une suite donnéee, où l'on remarque l'élégance et la profondeur qu'on doit attendre d'un si grand analyste. Comme la méthode que j'ai employée dans mes calculs, diffère des siennes que je ne connaissais pas lorsque j'ai commencé mon travail, je vais en exposer le procédé.

D 2

PREMIERE PARTIE.

Méthode d'interpolation applicable aux phenomènes qui dépendent des fluides élastiques.

Les expériences doivent, autant qu'il est possible, être dirigées de manière à rendre les résultats équidistans; lorsqu'on n'a pas pu obtenir cette condition (ce qui doit arriver très-rarement) et que néanmoins les résultats sont assez nombreux et assez rapprochés, on les ramènera à être équidistants, soit par les moyens graphiques, en traçant la courbe des expériences, soit par le calcul, en considérant trois résultats consécutifs ζ_I, ζ_{II}, ζ_{III} dont le 2.^{e} et le 3.^{e} sont distans du I.^{er} de x' et de x'' respectivement ; on calculera le résultat ζ à la distance x de ζ_I, de manière qu'il se trouve compris dans la série de ceux qu'on veut rendre équidistans, par la formule suivante déduite de celles du $n.^o 19$ de mes leçons d'analyse,

$$\zeta = \frac{x''-x}{x'}.\frac{x'-x}{x''}\zeta_I + \frac{x}{x''-x'}\left(\frac{x''-x}{x'}\zeta_{II} - \frac{x'-x}{x''}\zeta_{III}\right);$$

on simplifiera beaucoup cette formule en ne calculant que l'excès de ζ sur ζ_I; pour cela faisant $\zeta_{II} - \zeta_I = \omega'$; $\zeta_{III} - \zeta_I = \omega''$, on aura

$$\zeta - \zeta_I = \frac{x}{x''-x'}\left(\frac{x''-x}{x'}\omega' - \frac{x'-x}{x''}\omega''\right).$$

Il sera bon, pour éviter toute erreur, d'essayer et la formule et les moyens graphiques, qui, lorsqu'on y mettra du soin et qu'on opérera sur une grande échelle, donneront ordinairement une exactitude comparable à celle des expériences mêmes. Cette préparation faite (les cas où elle sera nécessaire sont, comme je l'ai déjà dit, extrêmement rares), on prendra un certain nombre de résultats équidistans, embrassant ou la totalité ou une grande partie de l'étendue des expériences; ensuite la variable ζ désigant la mesure des effets successifs qui correspondent à des valeurs quelconques d'une autre variable x, laquelle indique à quel terme d'une échelle donnée se rapportent les effets ζ, on aura généralement

pour satisfaire à un nombre $2n$ de résultats ....

$$\zeta = \mu_I\rho_I^x + \mu_{II}\rho_{II}^x + \mu_{III}\rho_{III}^x + ... + \mu_{(n)}\rho_{(n)}^x \quad\text{.....................}(1)$$

pour satisfaire à un nombre $2n+1$ de résultats ....

$$\zeta = \mu_I \rho_I^x + \mu_{II} \rho_{II}^x + ... + \mu_{(n)} \rho_{(n)}^x + \mu_{(n+1)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

μ_I, μ_{II}, μ_{III}, &c. ρ_I, ρ_{II}, ρ_{III}, &c. sont des constantes dont on détermine la valeur d'après les résutats des expériences, ainsi qu'on le verra bientôt.

J'ai donné deux formules générales, quoique l'une, à la rigueur, eût pu suffire, mais j'ai eu en vue une simplification qu'il était important d'introduire dans ma méthode ; voici en quoi elle consiste : la détermination de ρ_I, ρ_{II}, &c. dépend de la solution d'une équation, et en employant la deuxième formule on satisfait à un nombre impair d'observations par une équation qui n'est pas plus élevée que celle qu'exigerait le nombre pair immédiatement inférieur ; ainsi on satisfait à quatre ou cinq observations en calculant une équation du deuxième degré, à six et à sept avec une du troisième, à huit et à neuf avec une du quatrième, &c. Iln'arrivera presque jamais qu'on ait huit ou neuf résultats à faire entrer dans la formule, et on pourra, sans sortir des limites dans lesquelles on a des méthodes pour la solution des équations numériques, traiter tous les cas que la physique présente ordinairement. Ajoutons à cet avantage celui de n'avoir dans la valeur de ζ qu'un nombre de termes égal à la moitié, au plus, du nombre des observations, au lieu que les formules qui se rapportent aux courbes paraboliques ont toujours autant de termes qu'il y a d'observations.

Voici la manière de déterminer, d'après les résultats donnés, les constantes des équations (1) et (2).

Premier cas, le nombre des observations étant pair.

J'ai démontré dans mes leçons d'analyse, $n.^{os}$ 20 et 21 I.^{o} que l'équation (I) donnait le terme général d'une suite récurrente de l'ordre n; 2.^{o} que les termes d'une pareille suite, pris à des intervalles égaux quelconques, reproduisaient toujours des récurrences du même ordre. Cela posé, soient les deux séries suivantes, dont la première donne les résultats observés ou les valeurs particulières de ζ fournies par l'expérience, et la deuxième les valeurs correspondantes de x

résultats observés . ... ζ_0 ; ζ_I ; ζ_{II} .... $\zeta_{(n)}$; $\zeta_{(n+1)}$; $\zeta_{(n+2)}$ .... $\zeta_{(2n-1)}$

valeurs correspondantes de x .... $0;\ x_I;\ 2x_I$ .... $nx_I;$
$(n{+}2)x_I$ .... $(2n-I)x_I$

les quantités $\zeta_0,\zeta_I,\zeta_{II}$,&c. doivent former une suite récurrente dont il faut trouver l'échelle de relation ; soit A_0,A_I,A_{II} . . . . . $A_{(n)}$ des coëfficiens indéterminés, tels qu'on ait les équations de condition

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
A_0 & \zeta_0 & + & A_I & \zeta_I & + & A_{II} & \zeta_{II} & + & \ldots\ldots & + & A_{(n)} & \zeta_{(n)} & = & 0\\
A_0 & \zeta_I & + & A_I & \zeta_{II} & + & A_{II} & \zeta_{III} & + & \ldots\ldots & + & A_{(n)} & \zeta_{(n+1)} & = & 0\\
A_0 & \zeta_{II} & + & A_I & \zeta_{III} & + & A_{II} & \zeta_{IV} & + & \ldots\ldots & + & A_{(n)} & \zeta_{(n+2)} & = & 0\\
A_0 & \zeta_{III} & + & A_I & \zeta_{IV} & + & A_{II} & \zeta_{V} & + & \ldots\ldots & + & A_{(n)} & \zeta_{(n+3)} & = & 0\\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & .\\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & .\\
A_0 & \zeta_{(n-1)} & + & A_I & \zeta_{(n)} & + & A_{II} & \zeta_{(n+1)} & + & \ldots\ldots & + & A_{(n)} & \zeta_{(2n-1)} & = & 0
\end{array}$$

On pourra, pour plus de commodité, supposer $A_{(n)}=1$ dans les applications numériques.

Ces équations, étant en nombre n donneront les n rapports $\frac{A_0}{A_{(n)}}$; $\frac{A_I}{A_{(n)}}$; $\frac{A_{II}}{A_{(n)}}$; ...... $\frac{A_{(n-1)}}{A_{(n)}}$ qui composent l'échelle de relation demandée, et on aura

Pour $\quad n=1 \quad A_0 : A_I = -\zeta_I : \zeta_0$

Valeur déduite de deux observations

Pour $\quad n=2 \left\{ \begin{array}{l} A_0 : A_{II} = \frac{\zeta_I\zeta_{III}-\zeta_{II}\zeta_{II}}{\zeta_0\zeta_{II}-\zeta_I\zeta_I} \\ A_I : A_{II} = \frac{\zeta_I\zeta_{II}-\zeta_0\zeta_{III}}{\zeta_0\zeta_{II}-\zeta_I\zeta_I} \end{array}\right.$

Valeurs déduites de quatre observations

$$\text{Pour} \quad n=3 \left\{ \begin{array}{lcc}
A_0 : A_{III} & = & \frac{+(\zeta_{III}\zeta_{III}-\zeta_{II}\zeta_{IV})\zeta_{III}+(\zeta_I\zeta_{IV}-\zeta_{II}\zeta_{III})\zeta_{IV}+(\zeta_{II}\zeta_{II}-\zeta_I\zeta_{III})\zeta_V}{-(\zeta_{III}\zeta_{III}-\zeta_{II}\zeta_{IV})\zeta_0-(\zeta_I\zeta_{IV}-\zeta_{II}\zeta_{III})\zeta_I-(\zeta_{II}\zeta_{II}-\zeta_I\zeta_{III})\zeta_{II}} \\
A_I : A_{III} & = & \frac{+(\zeta_I\zeta_{IV}-\zeta_{II}\zeta_{III})\zeta_{III}+(\zeta_{II}\zeta_{II}-\zeta_0\zeta_{IV})\zeta_{IV}+(\zeta_0\zeta_{III}-\zeta_I\zeta_{II})\zeta_V}{-(\zeta_I\zeta_{IV}-\zeta_{II}\zeta_{III})\zeta_I-(\zeta_{II}\zeta_{II}-\zeta_0\zeta_{IV})\zeta_{II}-(\zeta_0\zeta_{III}-\zeta_I\zeta_{II})\zeta_{III}} \\
A_{II} : A_{III} & = & \frac{+(\zeta_{II}\zeta_{II}-\zeta_I\zeta_{III})\zeta_{III}+(\zeta_0\zeta_{III}-\zeta_I\zeta_{II})\zeta_{IV}+(\zeta_I\zeta_I-\zeta_0\zeta_{II})\zeta_V}{-(\zeta_{II}\zeta_{II}-\zeta_I\zeta_{III})\zeta_{II}-(\zeta_0\zeta_{III}-\zeta_I\zeta_{II})\zeta_{III}-(\zeta_I\zeta_I-\zeta_0\zeta_{II})\zeta_{IV}}
\end{array}\right.$$

Valeurs déduites de six observations

&c. &c. &c.

Résolvant ensuite l'équation

$$A_0 + A_I\alpha + A_{II}\alpha^2 + A_{III}\alpha^3 + ... + A_{(n)}\alpha^n = 0,$$

les n racines qu'on trouvera seront les valeurs des n quantités $rho_I^{x_I}$, $rho_{II}^{x_I}$, $rho_{III}^{x_I}$, ..., $rho_{(n)}^{x_I}$, d'où on déduira celles de ρ_I, ρ_{II}, ρ_{III}, &c.; enfin les quantités μ_I, μ_{II}, μ_{III}, &c. seront données par les équations

$$\mu_I = \frac{(\zeta - \rho_{II}^{x_I})(\zeta - \rho_{III}^{x_I})(\zeta - \rho_{IV}^{x_I}).....(\zeta - \rho_{(n)}^{x_I})}{(\rho_I^{x_I} - \rho_{II}^{x_I})(\rho_I^{x_I} - \rho_{III}^{x_I})(\rho_I^{x_I} - \rho_{IV}^{x_I}).....(\rho_I^{x_I} - \rho_{(n)}^{x_I})}$$

$$\mu_{II} = \frac{(\zeta - \rho_I^{x_I})(\zeta - \rho_{III}^{x_I})(\zeta - \rho_{IV}^{x_I}).....(\zeta - \rho_{(n)}^{x_I})}{(\rho_{II}^{x_I} - \rho_I^{x_I})(\rho_{II}^{x_I} - \rho_{III}^{x_I})(\rho_{II}^{x_I} - \rho_{IV}^{x_I}).....(\rho_{II}^{x_I} - \rho_{(n)}^{x_I})}$$

$$\mu_{III} = \frac{(\zeta - \rho_I^{x_I})(\zeta - \rho_{II}^{x_I})(\zeta - \rho_{IV}^{x_I}).....(\zeta - \rho_{(n)}^{x_I})}{(\rho_{III}^{x_I} - \rho_I^{x_I})(\rho_{III}^{x_I} - \rho_{II}^{x_I})(\rho_{III}^{x_I} - \rho_{IV}^{x_I}).....(\rho_{III}^{x_I} - \rho_{(n)}^{x_I})}$$

....

....

$$\mu_{(n)} = \frac{(\zeta - \rho_I^{x_I})(\zeta - \rho_{II}^{x_I})(\zeta - \rho_{III}^{x_I}).....(\zeta - \rho_{(n-1)}^{x_I})}{(\rho_{(n)}^{x_I} - \rho_I^{x_I})(\rho_{(n)}^{x_I} - \rho_{II}^{x_I})(\rho_{(n)}^{x_I} - \rho_{III}^{x_I}).....(\rho_{(n)}^{x_I} - \rho_{(n-1)}^{x_I})}$$

en observant que dans le développement des numérateurs tous les expsans des puissances de ζ doivent être changés en accens de même numéro, c'est-à-dire, qu'il faut à ζ^0 substituer ζ_0 (ou multiplier par ζ_0 tous les termes où ζ ne se trouve pas) à ζ substituer ζ_I, à ζ^2 substituer ζ_{II}, &c. Ainsi on dans le cas de

$$n = 1....\mu_I = \zeta_0$$

Pour satisfaire à deux observations,

$$n = 2.... \begin{cases} \mu_I = \frac{\zeta_I - \rho_{II}^{x_I}\zeta_0}{\rho_I^{x_I} - \rho_{II}^{x_I}} \\ \mu_{II} = \frac{\zeta_I - \rho_I^{x_I}\zeta_0}{\rho_{II}^{x_I} - \rho_I^{x_I}} \end{cases}$$

Pour satisfaire à quatre observations,

$$n = 3.... \begin{cases} \mu_I = \frac{\zeta_{II} - (\rho_{II}^{x_I} + \rho_{III}^{x_I})\zeta_I + \rho_{II}^{x_I}\rho_{III}^{x_I}\zeta_0}{(\rho_I^{x_I} - \rho_{II}^{x_I})(\rho_I^{x_I} - \rho_{III}^{x_I})} \\ \mu_{II} = \frac{\zeta_{II} - (\rho_I^{x_I} + \rho_{III}^{x_I})\zeta_I + \rho_I^{x_I}\rho_{III}^{x_I}\zeta_0}{(\rho_{II}^{x_I} - \rho_I^{x_I})(\rho_I^{x_I} - \rho_{III}^{x_I})} \\ \mu_{III} = \frac{\zeta_{II} - (\rho_{II}^{x_I} + \rho_I^{x_I})\zeta_I + \rho_{II}^{x_I}\rho_I^{x_I}\zeta_0}{(\rho_{III}^{x_I} - \rho_I^{x_I})(\rho_{III}^{x_I} - \rho_{II}^{x_I})} \end{cases}$$

Pour satisfaire à six observations.

&c &c.

Ce qui s'accorde avec les formules que j'ai données $n.^0$ 20 de mes leçons d'analyse, en faisant $x = 1$; et pour rendre le calcul d'élimination qui donne μ_I,μ_2,&c. absolument semblable à celui du cours, on fera $\rho_I^{x_I} = \psi_I$,$\rho_{II}^{x_I} = \psi_{II}$,&c. et on cherchera μ_I,μ_{II}&c. en valeur de ψ_I,ψ_{II}&c. On sait que x_I est ici l'accroissement constant de x ou le Δx. Les quantités ρ_I,ρ_{II},ρ_{III},&c.μ_I,μ_{II},μ_{III},&c. étant ainsi déterminées, on substituera leurs valeurs dans l'équation (1)

$$\zeta = \mu_I\rho_I^{x_I} + \mu_{II}\rho_{II}^{x_I} + \mu_{III}\rho_{III}^{x_I} + ... + \mu_{(n)}\rho_{(n)}^{x_I},$$

qui sera alors disposée pour satisfaire aux $2n$ observations données, et pour fournir un résultat quelconque intermédiaire entre ceux obtenus par le fait.

Second cas, le nombre des observations étant impair.

Pour résoudre ce second cas, on observera que l'équation (2) ne diffère pas de l'équation (1) que par le terme constant $\mu_{(n+1)}$. Ainsi la série des ζ tirée de (2), est de même nature que celle tirée de (1), avec la seule différence que dans (2) chaque terme est augmenté de μ_{n+1}. Si donc on diminue ces mêmes termes de μ_{n+1}, les restes auront entre eux les relations que comporte une suite récurrente de l'ordre n(*), c'est-à-dire, qu'en conservant la notation de l'article précédent, on a

(*) larécurrence est, dans le fait de l'ordre $n + I$, mais l'équation de relation a une racine égale à l'unité, c'est-à-dire, que dans le terme $\mu_{(n+I)}\rho_{(n+I)}^x$ on a $\rho_{(n+I)} = I$; ainsi le degré de l'équation peut s'abaisser d'une unité.

$$\begin{gathered}
A_0(\zeta_0 - \mu_{(n+1)}) + A_I(\zeta_I - \mu_{(n+1)}) + A_{II}(\zeta_{II} - \mu_{(n+1)}) + ... + A_{(n)}(\zeta_{(n)} - \mu_{(n+1)}) = 0\\
A_0(\zeta_I - \mu_{(n+1)}) + A_I(\zeta_{II} - \mu_{(n+1)}) + A_{II}(\zeta_{III} - \mu_{(n+1)}) + ... + A_{(n)}(\zeta_{(n+1)} - \mu_{(n+1)}) = 0\\
A_0(\zeta_{II} - \mu_{(n+1)}) + A_I(\zeta_{III} - \mu_{(n+1)}) + A_{II}(\zeta_{IV} - \mu_{(n+1)}) + ... + A_{(n)}(\zeta_{(n+2)} - \mu_{(n+1)}) = 0\\
A_0(\zeta_{III} - \mu_{(n+1)}) + A_I(\zeta_{IV} - \mu_{(n+1)}) + A_{II}(\zeta_{V} - \mu_{(n+1)}) + ... + A_{(n)}(\zeta_{(n+3)} - \mu_{(n+1)}) = 0\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
A_0(\zeta_{(n-1)} - \mu_{(n+1)}) + A_I(\zeta_{(n)} - \mu_{(n+1)}) + A_{II}(\zeta_{(n+1)} - \mu_{(n+1)}) + ... + A_{(n)}(\zeta_{(2n-1)} - \mu_{(n+1)}) = 0\\
A_0(\zeta_{(n)} - \mu_{(n+1)}) + A_I(\zeta_{(n+1)} - \mu_{(n+1)}) + A_{II}(\zeta_{(n+2)} - \mu_{(n+1)}) + ... + A_{(n)}(\zeta_{(2n)} - \mu_{(n+1)}) = 0
\end{gathered}$$

Si on retranche ces équations l'une de l'autre, $\mu_{(n+1)}$ s'éliminera, et elles deviendront

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
A_0 & \Delta\zeta_0 & + & A_I & \Delta\zeta_I & + & A_{II} & \Delta\zeta_{II} & + & ...... & + & A_{(n)} & \Delta\zeta_{(n)} & = & 0\\
A_0 & \Delta\zeta_I & + & A_I & \Delta\zeta_{II} & + & A_{II} & \Delta\zeta_{III} & + & ...... & + & A_{(n)} & \Delta\zeta_{(n+1)} & = & 0\\
A_0 & \Delta\zeta_{II} & + & A_I & \Delta\zeta_{III} & + & A_{II} & \Delta\zeta_{IV} & + & ...... & + & A_{(n)} & \Delta\zeta_{(n+2)} & = & 0
\end{array}$$

$A_0\Delta$

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
A_0 & \Delta\zeta_{III} & + & A_I & \Delta\zeta_{IV} & + & A_{II} & \Delta\zeta_V & + & ...... & + & A_{(n)} & \Delta\zeta_{(n+3)} & = & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
A_0 & \Delta\zeta_{(n-1)} & + & A_I & \Delta\zeta_{(n)} & + & A_{II} & \Delta\zeta_{(n+1)} & + & ..... & + & A_{(n)} & \Delta\zeta_{(2n-1)} & = & 0
\end{array}
$$

On pourra, pour plus de commodité, supposer $A_{(n)} = 1$ dans les applications numériques.

équations dont on tirera les valeurs de $\frac{A_0}{A_{(n)}}$, $\frac{A_I}{A_{(n)}}$, $\frac{A_{II}}{A_{(n)}}$, &c savoir,

Pour $n = 1 \quad A_0 : A_I = -\Delta\zeta_I : \Delta\zeta_0$

Valeur déduite de trois observations

Pour $n = 2 \left\{ \begin{array}{l} A_0 : A_{II} = \frac{\Delta\zeta_I\Delta\zeta_{III} - \Delta\zeta_{II}\Delta\zeta_{II}}{\Delta\zeta_0\Delta\zeta_{II} - \Delta\zeta_I\Delta\zeta_I} \\ A_I : A_{II} = \frac{\Delta\zeta_I\Delta\zeta_{II} - \Delta\zeta_0\Delta\zeta_{III}}{\Delta\zeta_0\Delta\zeta_{II} - \Delta\zeta_I\Delta\zeta_I} \end{array} \right.$

Valeurs déduites de cinq observations

Pour $n = 3 \left\{ \begin{array}{l} A_0 : A_{III} = \frac{+(\Delta\zeta_{III}\Delta\zeta_{III} - \Delta\zeta_{II}\Delta\zeta_{IV})\Delta\zeta_{III} + (\Delta\zeta_I\Delta\zeta_{IV} - \Delta\zeta_{II}\Delta\zeta_{III})\Delta\zeta_{IV} + (\Delta\zeta_{II}\Delta\zeta_{II} - \Delta\zeta_I\Delta\zeta_{III})\Delta\zeta_V}{-(\Delta\zeta_{III}\Delta\zeta_{III} - \Delta\zeta_{II}\Delta\zeta_{IV})\Delta\zeta_0 - (\Delta\zeta_I\Delta\zeta_{IV} - \Delta\zeta_{II}\Delta\zeta_{III})\Delta\zeta_I - (\Delta\zeta_{II}\Delta\zeta_{II} - \Delta\zeta_I\Delta\zeta_{III})\Delta\zeta_{II}} \\ A_I : A_{III} = \frac{+(\Delta\zeta_I\Delta\zeta_{IV} - \Delta\zeta_{II}\Delta\zeta_{III})\Delta\zeta_{III} + (\Delta\zeta_{II}\Delta\zeta_{II} - \Delta\zeta_0\zeta_{IV})\zeta_{IV} + (\Delta\zeta_0\Delta\zeta_{III} - \Delta\zeta_I\Delta\zeta_{II})\Delta\zeta_V}{-(\Delta\zeta_I\Delta\zeta_{IV} - \Delta\zeta_{II}\Delta\zeta_{III})\Delta\zeta_I - (\Delta\zeta_{II}\Delta\zeta_{II} - \Delta\zeta_0\Delta\zeta_{IV})\Delta\zeta_{II} - (\Delta\zeta_0\Delta\zeta_{III} - \Delta\zeta_I\Delta\zeta_{II})\Delta\zeta_{III}} \\ A_{II} : A_{III} = \frac{+(\Delta\zeta_{II}\Delta\zeta_{II} - \Delta\zeta_I\Delta\zeta_{III})\Delta\zeta_{III} + (\Delta\zeta_0\Delta\zeta_{III} - \Delta\zeta_I\Delta\zeta_{II})\Delta\zeta_{IV} + (\Delta\zeta_I\Delta\zeta_I - \Delta\zeta_0\Delta\zeta_{II})\Delta\zeta_V}{-(\Delta\zeta_{II}\Delta\zeta_{II} - \Delta\zeta_I\Delta\zeta_{III})\Delta\zeta_{II} - (\Delta\zeta_0\Delta\zeta_{III} - \Delta\zeta_I\Delta\zeta_{II})\Delta\zeta_{III} - (\Delta\zeta_I\Delta\zeta_I - \Delta\zeta_0\Delta\zeta_{II})\Delta\zeta_{IV}} \end{array} \right.$

Valeurs déduites de sept observations

&c. &c. &c.

Ensuite k étant un nombre entier positif, qui n'excède pas n, on pourra évaluer $\mu_{(n+I)}$ par l'une quelconque des n équations que renferme la suivante

$$\mu_{(n+I)} = \frac{\left\{A_0\zeta_{(k)} + A_I\zeta_{(k+I)} + A_{II}\zeta_{(k+2)} + ... + A_{(n)}\zeta_{(k-n)}\right\} : A_{(n)}}{\left(A_0 + A_I + A_{II} + ... + A_{(n)}\right) : A_{(n)}}$$

qui doit donner la même valeur pour $\mu_{(n+I)}$ quelquesoit celui des nombres 0, 1, 2, 3, ... n, qu'on prenne pour k.

Résolvant ensuite l'équation

$$A_0 + A_I\alpha + A_{II}\alpha^2 + A_{III}\alpha^3 + ... + A_{(n)}\alpha^{(n)} = 0,$$

les n racines qu'elle donnera seront les valeurs de $\rho_I^{x_I}$, $\rho_{II}^{x_{II}}$, $\rho_{III}^{x_{III}}$, . . . $\rho_{(n)}^{x_{(n)}}$, d'où on déduira celles de ρ_I, ρ_{II}, ρ_{III}, &c. à substituer dans l'équation (2), et les valeurs de μ_I, μ_{II}, μ_{III}, &c. de la même équation se calculeront par les formules (*).

$$\mu_I = \frac{(\zeta - \rho_{II}^{x_I})(\zeta - \rho_{III}^{x_I})(\zeta - \rho_{IV}^{x_I}).....(\zeta - \rho_{(n)}^{x_I})(\zeta - 1)}{(\rho_I^{x_I} - \rho_{II}^{x_I})(\rho_I^{x_I} - \rho_{III}^{x_I})(\rho_I^{x_I} - \rho_{IV}^{x_I}).....(\rho_I^{x_I} - \rho_{(n)}^{x_I})(\rho_I^{x_I} - I)}$$

$$\mu_{II} = \frac{(\zeta - \rho_{I}^{x_I})(\zeta - \rho_{III}^{x_I})(\zeta - \rho_{IV}^{x_I}).....(\zeta - \rho_{(n)}^{x_I})(\zeta - 1)}{(\rho_{II}^{x_I} - \rho_{I}^{x_I})(\rho_{II}^{x_I} - \rho_{III}^{x_I})(\rho_{II}^{x_I} - \rho_{IV}^{x_I}).....(\rho_{II}^{x_I} - \rho_{(n)}^{x_I})(\rho_{II}^{x_I} - I)}$$

$$\mu_{III} = \frac{(\zeta - \rho_{I}^{x_I})(\zeta - \rho_{II}^{x_I})(\zeta - \rho_{IV}^{x_I}).....(\zeta - \rho_{(n)}^{x_I})(\zeta - 1)}{(\rho_{III}^{x_I} - \rho_{I}^{x_I})(\rho_{III}^{x_I} - \rho_{II}^{x_I})(\rho_{III}^{x_I} - \rho_{IV}^{x_I}).....(\rho_{III}^{x_I} - \rho_{(n)}^{x_I})(\rho_{III}^{x_I} - I)}$$

....

....

$$\mu_{(n)} = \frac{(\zeta - \rho_{I}^{x_I})(\zeta - \rho_{II}^{x_I})(\zeta - \rho_{IV}^{x_I}).....(\zeta - \rho_{(n-1)}^{x_I})(\zeta - 1)}{(\rho_{(n)}^{x_I} - \rho_{I}^{x_I})(\rho_{(n)}^{x_I} - \rho_{II}^{x_I})(\rho_{(n)}^{x_I} - \rho_{III}^{x_I}).....(\rho_{(n)}^{x_I} - \rho_{(n-1)}^{x_I})(\rho_{(n)}^{x_I} - I)}$$

$$\mu_{(n+1)} = \zeta_0 - (\mu_I + \mu_{II} + \mu_{III} + ... + \mu_{(n)})$$

(*) Si on retranche de ces formules les facteurs $\zeta - I$ et $\rho_I^{x_I} - I$ $\rho_{II}^{x_I} - I$, $\rho_{III}^{x_I} - I$ &c. on aura les constantes qui conviennent au terme général de la suite Δ_{ζ_0}, Δ_{ζ_I}, $\Delta_{\zeta_{II}}$, &c., c'est-à-dire qu'on aura les constantes qui devraient multiplier ρ_I^x ρ_{II}^x &c. dans la valeur de $\Delta\zeta$.

Observez, comme dans l'article précédent, que, dans le développement des numérateurs, il faut aux exposans des puissances de ζ, substituer des accens de même numéro, ou multiplier par ζ_0 les termes où ζ ne sera pas, et par ζ_I, ζ_{II}, ζ_{III}, etc. respectivement ceux qui seront multipliés par ζ, ζ^2, ζ^3, &c. la dernière valeur de $\mu_{(n+I)}$ est beaucoup lus facile à calculer que la précédente qu'on pourra n'employer que comme vérification; si on donne à n différentes valeurs, on aura dasn le cas de

$$n = I.... \begin{cases} \mu_I = \frac{\zeta_I - \zeta_0}{\rho_I^{x_I} - I} \\ \mu_{II} = \zeta_I - \mu_I \end{cases}$$

Pour satisfaire à trois observations,

$$n = 2.... \begin{cases} \mu_I = \frac{\zeta_{II} - (\rho_I^{x_I} + I)\zeta_I + \rho_{II}^{x_I}\zeta_0}{(\rho_I^{x_I} - \rho_{II}^{x_I})(\rho_I^{x_I} - I)} \\ \mu_{II} = \frac{\zeta_{II} - (\rho_I^{x_I} + I)\zeta_I + \rho_I^{x_I}\zeta_0}{(\rho_{II}^{x_I} - \rho_I^{x_I})(\rho_{II}^{x_I} - I)} \\ \mu_{III} = \zeta_0 - (\mu_I + \mu_{II}) \end{cases}$$

Pour satisfaire à cinq observations,

$$n = 3 .... \begin{cases} \mu_I = \frac{\zeta_{III} - (\rho_{III}^{x_I} + \rho_{II}^{x_I} + I)\zeta_{II} + (\rho_{III}^{x_I}\rho_{II}^{x_I} + \rho_{III}^{x_I} + \rho_{II}^{x_I})\zeta_I - \rho_{III}^{x_I}\rho_{II}^{x_I}\zeta_0}{(\rho_I^{x_I} - \rho_{II}^{x_I})(\rho_I^{x_I} - \rho_{III}^{x_I})(\rho_{II}^{x_I} - I)} \\ \mu_{II} = \frac{\zeta_{III} - (\rho_{III}^{x_I} + \rho_{II}^{x_I} + I)\zeta_{III} + (\rho_{III}^{x_I}\rho_I^{x_I} + \rho_{III}^{x_I} + \rho_I^{x_I})\zeta_I - \rho_{III}^{x_I}\rho_{II}^{x_I}\zeta_0}{(\rho_I^{x_I} - \rho_{II}^{x_I})(\rho_I^{x_I} - \rho_{III}^{x_I})(\rho_{II}^{x_I} - I)} \\ \mu_{III} = \frac{\zeta_{III} - (\rho_{III}^{x_I} + \rho_{II}^{x_I} + I)\zeta_{II} + (\rho_{II}^{x_I}\rho_I^{x_I} + \rho_{II}^{x_I} + \rho_I^{x_I})\zeta_I - \rho_{II}^{x_I}\rho_I^{x_I}\zeta_0}{(\rho_I^{x_I} - \rho_{II}^{x_I})(\rho_I^{x_I} - \rho_{III}^{x_I})(\rho_{II}^{x_I} - I)} \\ \mu_{IV} = \zeta_0 - (\mu_I + \mu_{II} + + \mu_{III}) \end{cases}$$

Pour satisfaire à sept observations,

&c. &c.

ce qui s'accorde encore avec les formules du $n.^o\ XX$ de mes leçons d'analyse, en faisant dans chaque cas x_I et le ρ de l'accent le plus élevé, égaux à l'unité.

Tous les nombres ρ_I, ρ_{II}, ρ_{III} &c. μ_I, μ_{II}, μ_{III}, &c. ainsi trouvés, on les introduira dans l'équation (2)

$$\zeta = \mu_I \rho_I^{x_I} + \mu_{II} \rho_{II}^{x} + \mu_{III} \rho_{III}^{x} + ... + \mu_{(n)} \rho_{(n)}^{x} + \mu_{(n+I)}$$

qui sat isfera aux $2n + I$ observations données, et servira à calculer toutes les valeurs intermédiaires entre ces observations.

Je ne parle pas du cas où l'équation

$$A_0 + A_I \alpha + A_{II} \alpha^2 + ... + A_{(n)} \alpha^{(n)} = 0$$

a des racines égales ou imaginaires ; j'ai donné dans le $n.^o\ XX$ de mes leçons d'analyse les formules nécessaires pour les résoudre. On sait que les racines égales introduisent des coëfficiens variables et rationnels dans la valeur de ζ, et si ces racines sont égales à l'unité, ζ contiendra alors des termes entièrement rationnels : ainsi les formules d'interpolations qui se rapportent aux fonctions rationnelles sans diviseurs variables , ou aux courbes paraboliques, ne sont qu'un cas très-particulier de celles que je viens de donner.

Je passe aux applications.